

(dis)ordini
praticare la complessità

Filosofica

(dis)ordini

praticare la complessità

Direzione

Simone Collavini, Sonia Maffei

Comitato scientifico ed editoriale

Andrea Addobbati, Simonetta Bassi, Cristina Cassina, Vinzia Fiorino,
Matteo Giuli, Antonio Masala, Francesco Pelosi, Alma Poloni, Alberto L. Siani

1. Cristina Cassina, *Il giardino alla francese. Politica, cultura, costituzioni*, 2024, pp. 176
2. Luca Bellotti, *Prospettive di filosofia della matematica*, 2025, pp. 152

Luca Bellotti

Prospettive di filosofia della matematica

visualizza la scheda del libro sul sito www.edizioniets.com



Edizioni ETS



www.edizioniets.com

*Volume pubblicato con il contributo del Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere
dell'Università di Pisa, che ha avuto il riconoscimento di Eccellenza del MUR
per la qualità dei progetti di ricerca*

© Copyright 2025

EDIZIONI ETS

Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa

info@edizioniets.com

www.edizioniets.com

Distribuzione

Messaggerie Libri SPA

Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione

PDE PROMOZIONE SRL

via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884677151-3

Ogni volume è sottoposto a referaggio "doppio cieco"

Alla memoria di mio padre

*Unsere Kunst ist ein von der Wahrheit Geblendet-Sein:
Das Licht auf dem zurückweichenden Fratzensgesicht
ist wahr, sonst nichts.*

K.

Prefazione

Questo lavoro vuole essere una ricognizione di alcune prospettive teoriche nella filosofia della matematica che, pur derivando in parte da posizioni classiche e sempre confrontandosi con esse, sono risultate in qualche misura minoritarie (o addirittura per certi aspetti eccentriche) nel dibattito novecentesco (soprattutto nel contesto della filosofia analitica) e in quello degli ultimi decenni (che ha preso nuove direzioni, più attente all'effettiva pratica dei matematici), ma non per questo sono di minore interesse e impegno teoretico (oltre che storico o descrittivo), anche nel rinnovato (benché forse vano) tentativo di riconoscere la complessità degli sviluppi contemporanei della matematica (che pare sempre più frammentarsi nel disordine di una specializzazione e complicazione irriducibili) senza perderne di vista l'unità necessaria.

Si tratta di una breve monografia di ricerca, senza pretese di completezza, che per la sua impostazione non si sovrappone ai pochi testi introduttivi di filosofia della matematica pubblicati negli ultimi decenni e disponibili in italiano, ma dovrebbe comunque risultare leggibile anche a chi abbia interessi epistemologici generali (oltre ad offrire forse qualche motivo di richiamo per gli specialisti), in quanto la presentazione rimane non tecnica e si dà sempre il contesto del dibattito sui problemi via via considerati nelle diverse impostazioni (delle quali si indica la direzione, più che vederne i dettagli, senza sostenerne una come decisamente preferibile).

Dopo alcune osservazioni preliminari sul rapporto notoriamente problematico tra l'ordinaria nozione di verità come corrispondenza e la possibilità della conoscenza di entità astratte, si presentano e discutono alcune prospettive fondamentali. In primo luogo, una forma di realismo matematico riferito in particolare alla teoria degli insiemi come contesto fondazionale dell'intera matematica (soffermandosi sui rapporti tra intuizione e formalizzazione e tra matematica informale e formale); in secondo luogo, una prospettiva neokantiana alternativa

al realismo (a partire dalla filosofia della matematica di Ernst Cassirer, indicandone possibili sviluppi); in terzo luogo, un'impostazione metodologica naturalista (nel senso di opposizione alla possibilità di una filosofia prima) applicata in modo specifico alla matematica. Infine, si prenderanno in esame più sinteticamente tre esempi di prospettive non riconducibili a quelle precedenti (una concettualista, una fenomenologica, una wittgensteiniana).

Uno sguardo d'insieme

La filosofia della matematica degli ultimi decenni è stata caratterizzata dall'emergere di nuovi interessi, che si sono affiancati ai suoi classici problemi epistemologici e ontologici, senza sostituirli ma mettendoli in qualche modo sullo sfondo. L'attenzione per le diverse effettive pratiche dei matematici, sia per quanto riguarda la dimostrazione (con le trasformazioni, spesso controverse, che tale attività ha conosciuto e continua a conoscere proprio in questi anni), sia per tutte le altre attività di costruzione e sviluppo teorico delle diverse discipline matematiche, è stata forse la direzione principale e in qualche misura unificante, modificando l'impostazione delle tradizionali problematiche epistemologiche e anche metodologiche, pur senza cancellarle. La questione di che cosa sia propriamente una spiegazione in matematica (non ridotta al problema generale della spiegazione scientifica), o quella di individuare le condizioni della comprensione (non solo della conoscenza) specificamente matematica, sono esempi significativi di questo cambio di atteggiamento. Qui ripartiremo però dal più classico dei problemi che sono stati al centro della filosofia della matematica di ambito analitico negli ultimi decenni, vale a dire il ben noto dilemma di Benacerraf, non solo per questa sua centralità (storica, oggi forse perduta), ma principalmente perché qualunque prospettiva (classica o meno) che si assume nella riflessione filosofica sulla matematica deve prima o poi fare i conti con esso (il problema rimane sottotraccia anche quando non lo si affronta), per cui può servire come un buon punto di partenza per distinguerle e valutarle. Il dilemma è questo (in breve): o la verità degli enunciati matematici è assimilabile a quella degli enunciati delle scienze naturali, ma in tal caso è inspiegabile la *conoscenza* degli oggetti matematici (poiché

non abbiamo un accesso alle entità matematiche assimilabile a quello che abbiamo al mondo fisico); o non lo è, ma allora è dubbio che si tratti ancora di *verità*.

La prima prospettiva che prendiamo in considerazione è una forma particolare di realismo, che chiamiamo (per ragioni che diverranno chiare) “realismo insiemistico”. Per introdurlo consideriamo la semantica ordinaria dei linguaggi formali, in particolare concentrandoci sul linguaggio della teoria degli insiemi, per il suo ruolo storicamente centrale nell’ambito dei fondamenti della matematica. Intendiamo il realismo come una posizione filosofica per cui la matematica è una scienza i cui oggetti sono entità astratte che esistono oggettivamente e i cui enunciati sono veri o falsi a seconda delle proprietà che quelle entità possiedono, indipendentemente dal linguaggio e dalla conoscenza. Nel caso specifico e fondamentale della teoria degli insiemi, tale posizione postula una realtà ben determinata di cui gli enunciati della teoria assiomatica formale degli insiemi devono essere veri: l’universo degli insiemi. Essendo la semantica ordinaria dei linguaggi formali essenzialmente insiemistica, sembra necessario postulare per il linguaggio della stessa teoria degli insiemi una semantica in una certa misura *intuitiva*, e questo porta in modo naturale a posizioni realiste. Le difficoltà che circondano le nozioni di semantica intuitiva, di accesso mediante intuizione al modello inteso, di matematica informale, saranno discusse ampiamente, concludendo che esse derivano dalla natura peculiare (o forse piuttosto dall’irrelevanza) che alcuni problemi che sorgono naturalmente con altri linguaggi assumono nel caso dei linguaggi matematici, e che comunque il realismo non le risolve. Sosterremo che il linguaggio della teoria degli insiemi non è una sorta di “linguaggio naturale” della matematica; al contrario, quando (come in questo caso) non si possono più tener separate una teoria assiomatica formale, la sua semantica e la teoria su cui quest’ultima è costruita, non possiamo più pensare ingenuamente che questi livelli siano “assoluti” e abbiano alla base la “realtà” matematica stessa: quando trattiamo i modelli della teoria degli insiemi non possiamo evitare questa apparente circolarità e dobbiamo e possiamo affrontarla in modo genuinamente matematico, senza doverci impegnare ad accettare una filosofia realista epistemologicamente problematica.

Per presentare una seconda possibile prospettiva, neokantiana, che abbia presenti sia gli sviluppi postkantiani della matematica che i risul-

tati della logica e dello studio dei fondamenti della matematica del secolo scorso, prenderemo in considerazione qualche aspetto dei principali contributi di Ernst Cassirer in questo campo, dato che nessuno come lui ha sostenuto come ancora valida un'opzione kantiana in filosofia della matematica (pur riconoscendo tutti i limiti teorici e storici della filosofia della matematica di Kant) con un paragonabile impegno teorico, accompagnato da rigore storiografico e conoscenza degli sviluppi a lui contemporanei. Cassirer rifiuta (anche in matematica) il modello della conoscenza come adeguazione, e ritiene che i problemi della libera ma niente affatto arbitraria costruzione dell'oggetto matematico e dell'oggettività della conoscenza che lo riguarda possano essere affrontati soltanto mediante un'ontologia *relazionale* e un'epistemologia *simbolica*, in cui è cruciale il ruolo della sintesi (nel senso di costruzione di oggetti e di posizione di concetti come principi di formazione di ordinamenti che sono costitutivi delle molteplicità ordinate), con conseguenze che vanno verso una forma peculiare di costruttivismo che si oppone alle prospettive fondazionali logiciste classiche.

La terza impostazione che discuteremo è una prospettiva naturalista in filosofia della matematica, sostenuta soprattutto da Penelope Maddy, che ha cercato di seguire le sue conseguenze per le questioni epistemologiche e metodologiche che emergono in particolare ancora nella teoria assiomatica degli insiemi. Discuteremo il suo originale "naturalismo insiemistico", sollevando qualche dubbio sulla possibilità di risolvere sempre le questioni metodologiche con considerazioni puramente "scientifiche", segnalando il rischio che dal rifiuto naturalistico di una riflessione propriamente filosofica distinta dalla scienza possa seguire non il rispetto del lavoro di chi fa scienza ma invece l'uso acritico di premesse filosofiche non dichiarate.

Se si prendono sul serio le difficoltà delle posizioni realiste, si è condotti in modo naturale a prendere in esame alternative concettualiste, nel senso di posizioni che considerano i concetti matematici come primari rispetto agli oggetti matematici. Normalmente tali posizioni pongono restrizioni di natura predicativista o costruttivista, ma vogliamo vedere se è invece possibile assumerle pur accettando senza restrizioni la matematica classica (incluse le estensioni assiomatiche della teoria degli insiemi), per cui discuteremo la proposta di Leslie Tharp in tal senso e le conseguenze di questo particolare concettualismo.

Una prospettiva fenomenologica è un'ulteriore alternativa, e per vedere le possibili conseguenze di questa opzione partiremo (a titolo di esempio) da alcune riflessioni di Kurt Gödel, che di solito si considera solo come esponente del realismo platonista, mentre ha sempre cercato nella fenomenologia trascendentale husserliana la chiave metodologica per la chiarificazione concettuale del significato delle nozioni filosofiche fondamentali rilevanti per i fondamenti della matematica. Dopo alcuni esempi dell'atteggiamento generale di Gödel nei confronti della fenomenologia, cercheremo di delineare la sua peculiare posizione idealista in rapporto al problema dell'intuizione degli oggetti ideali.

Infine, per vedere un possibile sviluppo di un punto di vista in senso lato wittgensteiniano in filosofia della matematica, prenderemo un solo esempio, senza entrare nell'esegesi delle riflessioni (notoriamente molto articolate) di Wittgenstein sulla matematica: alcune sue considerazioni sul "seguire una regola" nella loro esemplificazione in riferimento alle più semplici operazioni aritmetiche, per discutere la questione della possibilità, in quest'ambito, di una nozione coerente di esecuzione corretta di un'attività sottoposta a regole.

Un punto di vista diverso

Vedremo nel corso di questo lavoro che esiste una prospettiva che si pone in alternativa rispetto a quella assunta da gran parte della recente filosofia della matematica di ambiente analitico, e che rifiuta sin dall'inizio l'impostazione delle questioni che segue da quest'ultima. Si tratta di quello che chiameremo "punto di vista trascendentale", pur senza pretese di fedeltà a Kant o al neokantismo, in particolare quello di Cassirer, che sarà comunque il nostro punto di partenza per una riflessione sulla matematica che possa evitare certi presupposti prevalenti nella maggior parte delle impostazioni nella filosofia della matematica recente (come l'identificazione di oggettività e realtà, in senso fisico o platonico), prendendo invece come dato il *fatto* della conoscenza matematica e risalendo alle condizioni della sua possibilità, al di fuori di ontologie o epistemologie assunte in anticipo. Invece di chiederci (con Benacerraf) come possiamo avere accesso epistemico alle entità matematiche, ci chiederemo perché la matematica *non* ha alcun problema

di accesso alle “entità” con cui ha a che fare, e a quali condizioni possa darsi questa forma di conoscenza, che combina libertà di sviluppo concettuale ed esigenza di verità in modo veramente unico, trovandosi così in quel punto di intersezione tra limitazione e libertà che (come riconosceva Hermann Weyl) è l’essenza stessa dell’umano. L’oggettività matematica è infatti molto più solida di quella che si potrebbe ottenere dicendo che essa si basa su oggetti (astratti) “esterni”: si tratta (in prima approssimazione) di un’oggettività *concettuale*, che non è né nel mondo fisico né fuori di esso, poiché è una essenziale condizione logica della possibilità di un mondo in generale (il sapore neokantiano di questa tesi dovrebbe essere chiaro). Questa peculiare *oggettività di concetti*, che non tanto “esistono” o “sussistono” (in modi comunque tutti da chiarire) come sostanze in un mondo di entità astratte, o invece come rappresentazioni in un mondo di entità psichiche o cognitive, o ancora come costrutti di un linguaggio, quanto piuttosto *valgono* (*gelten*), è costitutiva di ciò che chiamiamo “realtà matematica”. Se questa caratterizzazione appare (non senza buone ragioni) ancora troppo vaga e problematica, sosterremo che ancor più problematiche (almeno rispetto alla conoscenza matematica) sono tutte le impostazioni filosofiche basate sulla dicotomia tra soggetto e oggetto, o tra ciò che è interno e ciò che è esterno, o tra il “mentale” e il “reale”, cercando di mostrare che la matematica non è né un mero prodotto libero della mente né una descrizione fedele di un mondo esterno (magari iperfisico), e che il “mondo” matematico è invece un mondo di concetti in quanto costituisce l’ambito delle *possibilità del pensiero* nel senso più generale. Qui di nuovo il pensiero non è inteso come un’attività mentale (non è l’atto del pensare, ma è semplicemente ciò che è pensato) e tuttavia non è nemmeno una realtà indipendente (platonisticamente intesa), perché in un certo senso non è neppure una realtà, è solo una *condizione logica* (nel senso più generale ed oggettivo) di ogni realtà possibile e concepibile (qui intesi come sinonimi, non connotati né oggettivamente né soggettivamente). In questa prospettiva (come in altre, per esempio quelle fenomenologiche), c’è un senso in cui l’oggettività ha un’estensione più ampia della realtà, e la matematica è la forma suprema e onnipervasiva di oggettività, che precede logicamente la costituzione di ogni realtà, e in particolare ogni dicotomia tra soggetto e oggetto. D’altro canto, i concetti matematici sono comunque (in linea di principio) umanamente intelligibili, perché

non sono nient'altro che ciò che costituisce la matematica stessa come attività umana; ma in questa attività propriamente umana i concetti che emergono sono radicalmente *trascendenti* rispetto all'attività stessa (in un senso distinto rispetto ai concetti della fisica): possono darsi soltanto in forma simbolica, *ipso facto* rimandando alla loro trascendenza. Questo fenomeno non smette di stupire e rimane enigmatico per la riflessione filosofica, ma lo è ancor più da quei punti di vista che non accettano il fatto della conoscenza matematica come punto di partenza; una prospettiva "trascendentale" compie invece precisamente questo passo, e per la stessa ragione il suo banco di prova dovrà essere il confronto con la pratica matematica.

Ringraziamenti

La maggior parte delle idee contenute in questo saggio sono state discusse, nel corso di molti anni, con pochi amici e colleghi, e in varie occasioni presentate in seminari e convegni, oltre che (in parte) agli studenti del seminario di Filosofia della matematica per il Corso di laurea magistrale in Filosofia e forme del sapere presso il Dipartimento di Civiltà e forme del sapere dell'Università di Pisa, Dipartimento a cui appartengo e di cui riconosco con gratitudine il sostegno per questo lavoro nell'ambito del Progetto di Eccellenza 2023-2027. Ringrazio tutti quelli che mi hanno ascoltato e dato riscontro per quello che ho potuto imparare da loro; voglio ricordare tra tutti in particolare Enrico Moriconi, per l'incoraggiamento e l'aiuto, per questo lavoro e sempre. Ringrazio infine i *referees* per i loro preziosi suggerimenti.

Pisa, settembre 2024

L. B.

Nota sulle fonti

Parte di questo lavoro deriva da scritti precedenti. Parti del secondo capitolo hanno origine da una rielaborazione di sezioni dei seguenti articoli: *On the circularity of set-theoretic semantics for set theory*, “Epistemologia” 37 (2014), 58-78; *Skolem, the Skolem ‘paradox’ and informal mathematics*, “Theoria” (Stockholm) 72 (2006), 177-212; *Formalization, syntax, and the standard model of arithmetic*, “Synthese” 154 (2007), 199-229. Parti del terzo capitolo provengono (con aggiornamenti) da: *Note in margine a ‘Kant und die moderne Mathematik’ di E. Cassirer*, “Studi Kantiani” 11 (1998), 121-134; *Sintesi e numero nell’ultimo Cassirer*, in *Fifth Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology* (a cura di L. Bellotti *et al.*), ETS, Pisa 2023, 1-14. Il quarto capitolo riprende aggiornandolo l’articolo *Naturalismo e realismo nella teoria degli insiemi*, “Rivista di Filosofia” 89 (1998), 445-475. Le traduzioni di tutte le citazioni sono mie salvo indicazione diversa.

Indice

Prefazione	7
Capitolo Primo	
Qualche premessa sul problema di Benacerraf	15
Capitolo Secondo	
Una prospettiva di realismo insiemistico	25
1. Realismo insiemistico	25
2. Intuizione e interpretazione	33
3. L'informale in matematica	37
4. Linguaggi matematici formali	45
Capitolo Terzo	
Una prospettiva neokantiana	55
1. Cassirer filosofo della matematica	55
2. Il <i>Funktionsbegriff</i>	66
3. Sui simboli matematici	70
4. Matematica libera	73
5. Un'alternativa neokantiana	82
Capitolo Quarto	
Una prospettiva naturalista	87
1. Naturalismo matematico	87
2. Conseguenze metodologiche	98
3. Qualche considerazione critica	105

Capitolo Quinto	
Altre prospettive	111
1. Una prospettiva concettualista	111
2. Una prospettiva fenomenologica	119
3. Una prospettiva wittgensteiniana	130
Bibliografia	141
Indice dei nomi	147

Edizioni ETS

Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa

info@edizioniets.com - www.edizioniets.com

Finito di stampare nel mese di gennaio 2025

