(dis)ordini

praticare la complessità

Filosofica

(dis)ordini

praticare la complessità

1. Cristina Cassina, *Il giardino alla francese. Politica, cultura, costituzioni*, 2024, pp. 176
2. Luca Bellotti, *Prospettive di filosofia della matematica*, 2025, pp. 152

Luca Bellotti

Prospettive di filosofia della matematica

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

Volume pubblicato con il contributo del Dipartimento di Civiltà e Forme del Sapere dell'Università di Pisa, che ha avuto il riconoscimento di Eccellenza del MUR per la qualità dei progetti di ricerca

EDIZIONI ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN cartaceo 978-884677151-3

Ogni volume è sottoposto a referaggio "doppio cieco"

Alla memoria di mio padre

Unsere Kunst ist ein von der Wahrheit Geblendet-Sein:
Das Licht auf dem zurückweichenden Fratzengesicht
ist wahr, sonst nichts.

K.

Prefazione

Questo lavoro vuole essere una ricognizione di alcune prospettive teoriche nella filosofia della matematica che, pur derivando in parte da posizioni classiche e sempre confrontandosi con esse, sono risultate in qualche misura minoritarie (o addirittura per certi aspetti eccentriche) nel dibattito novecentesco (soprattutto nel contesto della filosofia analitica) e in quello degli ultimi decenni (che ha preso nuove direzioni, più attente all'effettiva pratica dei matematici), ma non per questo sono di minore interesse e impegno teoretico (oltre che storico o descrittivo), anche nel rinnovato (benché forse vano) tentativo di riconoscere la complessità degli sviluppi contemporanei della matematica (che pare sempre più frammentarsi nel disordine di una specializzazione e complicazione irriducibili) senza perderne di vista l'unità necessaria.

Si tratta di una breve monografia di ricerca, senza pretese di completezza, che per la sua impostazione non si sovrappone ai pochi testi introduttivi di filosofia della matematica pubblicati negli ultimi decenni e disponibili in italiano, ma dovrebbe comunque risultare leggibile anche a chi abbia interessi epistemologici generali (oltre ad offrire forse qualche motivo di richiamo per gli specialisti), in quanto la presentazione rimane non tecnica e si dà sempre il contesto del dibattito sui problemi via via considerati nelle diverse impostazioni (delle quali si indica la direzione, più che vederne i dettagli, senza sostenerne una come decisamente preferibile).

Dopo alcune osservazioni preliminari sul rapporto notoriamente problematico tra l'ordinaria nozione di verità come corrispondenza e la possibilità della conoscenza di entità astratte, si presentano e discutono alcune prospettive fondamentali. In primo luogo, una forma di realismo matematico riferito in particolare alla teoria degli insiemi come contesto fondazionale dell'intera matematica (soffermandosi sui rapporti tra intuizione e formalizzazione e tra matematica informale e formale); in secondo luogo, una prospettiva neokantiana alternativa al realismo (a partire dalla filosofia della matematica di Ernst Cassirer, indicandone possibili sviluppi); in terzo luogo, un'impostazione metodologica naturalista (nel senso di opposizione alla possibilità di una filosofia prima) applicata in modo specifico alla matematica. Infine, si prenderanno in esame più sinteticamente tre esempi di prospettive non riconducibili a quelle precedenti (una concettualista, una fenomenologica, una wittgensteiniana).

Uno sguardo d'insieme

La filosofia della matematica degli ultimi decenni è stata caratterizzata dall'emergere di nuovi interessi, che si sono affiancati ai suoi classici problemi epistemologici e ontologici, senza sostituirli ma mettendoli in qualche modo sullo sfondo. L'attenzione per le diverse effettive pratiche dei matematici, sia per quanto riguarda la dimostrazione (con le trasformazioni, spesso controverse, che tale attività ha conosciuto e continua a conoscere proprio in questi anni), sia per tutte le altre attività di costruzione e sviluppo teorico delle diverse discipline matematiche, è stata forse la direzione principale e in qualche misura unificante, modificando l'impostazione delle tradizionali problematiche epistemologiche e anche metodologiche, pur senza cancellarle. La questione di che cosa sia propriamente una spiegazione in matematica (non ridotta al problema generale della spiegazione scientifica), o quella di individuare le condizioni della comprensione (non solo della conoscenza) specificamente matematica, sono esempi significativi di questo cambio di atteggiamento. Qui ripartiremo però dal più classico dei problemi che sono stati al centro della filosofia della matematica di ambito analitico negli ultimi decenni, vale a dire il ben noto dilemma di Benacerraf, non solo per questa sua centralità (storica, oggi forse perduta), ma principalmente perché qualunque prospettiva (classica o meno) che si assume nella riflessione filosofica sulla matematica deve prima o poi fare i conti con esso (il problema rimane sottotraccia anche quando non lo si affronta), per cui può servire come un buon punto di partenza per distinguerle e valutarle. Il dilemma è questo (in breve): o la verità degli enunciati matematici è assimilabile a quella degli enunciati delle scienze naturali, ma in tal caso è inspiegabile la *conoscenza* degli oggetti matematici (poiché non abbiamo un accesso alle entità matematiche assimilabile a quello che abbiamo al mondo fisico); o non lo è, ma allora è dubbio che si tratti ancora di *verità*.

La prima prospettiva che prendiamo in considerazione è una forma particolare di realismo, che chiamiamo (per ragioni che diverranno chiare) “realismo insiemistico”. Per introdurlo consideriamo la semantica ordinaria dei linguaggi formali, in particolare concentrandoci sul linguaggio della teoria degli insiemi, per il suo ruolo storicamente centrale nell’ambito dei fondamenti della matematica. Intendiamo il realismo come una posizione filosofica per cui la matematica è una scienza i cui oggetti sono entità astratte che esistono oggettivamente e i cui enunciati sono veri o falsi a seconda delle proprietà che quelle entità possiedono, indipendentemente dal linguaggio e dalla conoscenza. Nel caso specifico e fondamentale della teoria degli insiemi, tale posizione postula una realtà ben determinata di cui gli enunciati della teoria assiomatica formale degli insiemi devono essere veri: l’universo degli insiemi. Essendo la semantica ordinaria dei linguaggi formali essenzialmente insiemistica, sembra necessario postulare per il linguaggio della stessa teoria degli insiemi una semantica in una certa misura *intuitiva*, e questo porta in modo naturale a posizioni realiste. Le difficoltà che circondano le nozioni di semantica intuitiva, di accesso mediante intuizione al modello inteso, di matematica informale, saranno discusse ampiamente, concludendo che esse derivano dalla natura peculiare (o forse piuttosto dall’irrilevanza) che alcuni problemi che sorgono naturalmente con altri linguaggi assumono nel caso dei linguaggi matematici, e che comunque il realismo non le risolve. Sosterremo che il linguaggio della teoria degli insiemi non è una sorta di “linguaggio naturale” della matematica; al contrario, quando (come in questo caso) non si possono più tener separate una teoria assiomatica formale, la sua semantica e la teoria su cui quest’ultima è costruita, non possiamo più pensare ingenuamente che questi livelli siano “assoluti” e abbiano alla base la “realtà” matematica stessa: quando trattiamo i modelli della teoria degli insiemi non possiamo evitare questa apparente circolarità e dobbiamo e possiamo affrontarla in modo genuinamente matematico, senza doverci impegnare ad accettare una filosofia realista epistemologicamente problematica.

Per presentare una seconda possibile prospettiva, neokantiana, che abbia presenti sia gli sviluppi postkantiani della matematica che i risultati della logica e dello studio dei fondamenti della matematica del secolo scorso, prenderemo in considerazione qualche aspetto dei principali contributi di Ernst Cassirer in questo campo, dato che nessuno come lui ha sostenuto come ancora valida un'opzione kantiana in filosofia della matematica (pur riconoscendo tutti i limiti teorici e storici della filosofia della matematica di Kant) con un paragonabile impegno teorico, accompagnato da rigore storiografico e conoscenza degli sviluppi a lui contemporanei. Cassirer rifiuta (anche in matematica) il modello della conoscenza come adeguazione, e ritiene che i problemi della libera ma niente affatto arbitraria costruzione dell'oggetto matematico e dell'oggettività della conoscenza che lo riguarda possano essere affrontati soltanto mediante un'ontologia *relazionale* e un'epistemologia *simbolica*, in cui è cruciale il ruolo della sintesi (nel senso di costruzione di oggetti e di posizione di concetti come principi di formazione di ordinamenti che sono costitutivi delle molteplicità ordinate), con conseguenze che vanno verso una forma peculiare di costruttivismo che si oppone alle prospettive fondazionali logiciste classiche.

La terza impostazione che discuteremo è una prospettiva naturalista in filosofia della matematica, sostenuta soprattutto da Penelope Maddy, che ha cercato di seguire le sue conseguenze per le questioni epistemologiche e metodologiche che emergono in particolare ancora nella teoria assiomatica degli insiemi. Discuteremo il suo originale "naturalismo insiemistico", sollevando qualche dubbio sulla possibilità di risolvere sempre le questioni metodologiche con considerazioni puramente "scientifiche", segnalando il rischio che dal rifiuto naturalistico di una riflessione propriamente filosofica distinta dalla scienza possa seguire non il rispetto del lavoro di chi fa scienza ma invece l'uso acritico di premesse filosofiche non dichiarate.

Se si prendono sul serio le difficoltà delle posizioni realiste, si è condotti in modo naturale a prendere in esame alternative concettualiste, nel senso di posizioni che considerano i concetti matematici come primari rispetto agli oggetti matematici. Normalmente tali posizioni pongono restrizioni di natura predicativista o costruttivista, ma vogliamo vedere se è invece possibile assumerle pur accettando senza restrizioni la matematica classica (incluse le estensioni assiomatiche della teoria degli insiemi), per cui discuteremo la proposta di Leslie Tharp in tal senso e le conseguenze di questo particolare concettualismo.

Una prospettiva fenomenologica è un'ulteriore alternativa, e per vedere le possibili conseguenze di questa opzione partiremo (a titolo di esempio) da alcune riflessioni di Kurt Gödel, che di solito si considera solo come esponente del realismo platonista, mentre ha sempre cercato nella fenomenologia trascendentale husserliana la chiave metodologica per la chiarificazione concettuale del significato delle nozioni filosofiche fondamentali rilevanti per i fondamenti della matematica. Dopo alcuni esempi dell'atteggiamento generale di Gödel nei confronti della fenomenologia, cercheremo di delineare la sua peculiare posizione idealista in rapporto al problema dell'intuizione degli oggetti ideali.

Infine, per vedere un possibile sviluppo di un punto di vista in senso lato wittgensteiniano in filosofia della matematica, prenderemo un solo esempio, senza entrare nell'esegesi delle riflessioni (notoriamente molto articolate) di Wittgenstein sulla matematica: alcune sue considerazioni sul "seguire una regola" nella loro esemplificazione in riferimento alle più semplici operazioni aritmetiche, per discutere la questione della possibilità, in quest'ambito, di una nozione coerente di esecuzione corretta di un'attività sottoposta a regole.

Un punto di vista diverso

Vedremo nel corso di questo lavoro che esiste una prospettiva che si pone in alternativa rispetto a quella assunta da gran parte della recente filosofia della matematica di ambiente analitico, e che rifiuta sin dall'inizio l'impostazione delle questioni che segue da quest'ultima. Si tratta di quello che chiameremo "punto di vista trascendentale", pur senza pretese di fedeltà a Kant o al neokantismo, in particolare quello di Cassirer, che sarà comunque il nostro punto di partenza per una riflessione sulla matematica che possa evitare certi presupposti prevalenti nella maggior parte delle impostazioni nella filosofia della matematica recente (come l'identificazione di oggettività e realtà, in senso fisico o platonico), prendendo invece come dato il *fatto* della conoscenza matematica e risalendo alle condizioni della sua possibilità, al di fuori di ontologie o epistemologie assunte in anticipo. Invece di chiederci (con Benacerraf) come possiamo avere accesso epistemico alle entità matematiche, ci chiederemo perché la matematica *non* ha alcun problema di accesso alle “entità” con cui ha a che fare, e a quali condizioni possa darsi questa forma di conoscenza, che combina libertà di sviluppo concettuale ed esigenza di verità in modo veramente unico, trovandosi così in quel punto di intersezione tra limitazione e libertà che (come riconosceva Hermann Weyl) è l’essenza stessa dell’umano. L’oggettività matematica è infatti molto più solida di quella che si potrebbe ottenere dicendo che essa si basa su oggetti (astratti) “esterni”: si tratta (in prima approssimazione) di un’oggettività *concettuale*, che non è né nel mondo fisico né fuori di esso, poiché è una essenziale condizione logica della possibilità di un mondo in generale (il sapore neokantiano di questa tesi dovrebbe essere chiaro). Questa peculiare *oggettività di concetti*, che non tanto “esistono” o “sussistono” (in modi comunque tutti da chiarire) come sostanze in un mondo di entità astratte, o invece come rappresentazioni in un mondo di entità psichiche o cognitive, o ancora come costrutti di un linguaggio, quanto piuttosto *valgono* (*gelten*), è costitutiva di ciò che chiamiamo “realtà matematica”. Se questa caratterizzazione appare (non senza buone ragioni) ancora troppo vaga e problematica, sosterremo che ancor più problematiche (almeno rispetto alla conoscenza matematica) sono tutte le impostazioni filosofiche basate sulla dicotomia tra soggetto e oggetto, o tra ciò che è interno e ciò che è esterno, o tra il “mentale” e il “reale”, cercando di mostrare che la matematica non è né un mero prodotto libero della mente né una descrizione fedele di un mondo esterno (magari iperfisico), e che il “mondo” matematico è invece un mondo di concetti in quanto costituisce l’ambito delle *possibilità del pensiero* nel senso più generale. Qui di nuovo il pensiero non è inteso come un’attività mentale (non è l’atto del pensare, ma è semplicemente ciò che è pensato) e tuttavia non è nemmeno una realtà indipendente (platonisticamente intesa), perché in un certo senso non è neppure una realtà, è solo una *condizione logica* (nel senso più generale ed oggettivo) di ogni realtà possibile e concepibile (qui intesi come sinonimi, non connotati né oggettivamente né soggettivamente). In questa prospettiva (come in altre, per esempio quelle fenomenologiche), c’è un senso in cui l’oggettività ha un’estensione più ampia della realtà, e la matematica è la forma suprema e onnipervasiva di oggettività, che precede logicamente la costituzione di ogni realtà, e in particolare ogni dicotomia tra soggetto e oggetto. D’altro canto, i concetti matematici sono comunque (in linea di principio) umanamente intelligibili, perché non sono nient'altro che ciò che costituisce la matematica stessa come attività umana; ma in questa attività propriamente umana i concetti che emergono sono radicalmente *trascendenti* rispetto all'attività stessa (in un senso distinto rispetto ai concetti della fisica): possono darsi soltanto in forma simbolica, *ipso facto* rimandando alla loro trascendenza. Questo fenomeno non smette di stupire e rimane enigmatico per la riflessione filosofica, ma lo è ancor più da quei punti di vista che non accettano il fatto della conoscenza matematica come punto di partenza; una prospettiva "trascendentale" compie invece precisamente questo passo, e per la stessa ragione il suo banco di prova dovrà essere il confronto con la pratica matematica.

Ringraziamenti

La maggior parte delle idee contenute in questo saggio sono state discusse, nel corso di molti anni, con pochi amici e colleghi, e in varie occasioni presentate in seminari e convegni, oltre che (in parte) agli studenti del seminario di Filosofia della matematica per il Corso di laurea magistrale in Filosofia e forme del sapere presso il Dipartimento di Civiltà e forme del sapere dell'Università di Pisa, Dipartimento a cui appartengo e di cui riconosco con gratitudine il sostegno per questo lavoro nell'ambito del Progetto di Eccellenza 2023-2027. Ringrazio tutti quelli che mi hanno ascoltato e dato riscontro per quello che ho potuto imparare da loro; voglio ricordare tra tutti in particolare Enrico Moriconi, per l'incoraggiamento e l'aiuto, per questo lavoro e sempre. Ringrazio infine i *referees* per i loro preziosi suggerimenti.

Pisa, settembre 2024

L. B.

Nota sulle fonti

Parte di questo lavoro deriva da scritti precedenti. Parti del secondo capitolo hanno origine da una rielaborazione di sezioni dei seguenti articoli: *On the circularity of set-theoretic semantics for set theory*, "Epistemologia" 37 (2014), 58-78; *Skolem, the Skolem 'paradox' and informal mathematics*, "Theoria" (Stockholm) 72 (2006), 177-212; *Formalization, syntax, and the standard model of arithmetic*, "Synthese" 154 (2007), 199-229. Parti del terzo capitolo provengono (con aggiornamenti) da: *Note in margine a 'Kant und die moderne Mathematik' di E. Cassirer*, "Studi Kantiani" 11 (1998), 121-134; *Sintesi e numero nell'ultimo Cassirer*, in *Fifth Pisa Colloquium in Logic, Language and Epistemology* (a cura di L. Bellotti *et al.*), ETS, Pisa 2023, 1-14. Il quarto capitolo riprende aggiornandolo l'articolo *Naturalismo e realismo nella teoria degli insiemi*, "Rivista di Filosofia" 89 (1998), 445-475. Le traduzioni di tutte le citazioni sono mie salvo indicazione diversa.

Capitolo Primo
Qualche premessa sul problema di Benacerraf

Premettiamo alla presentazione e discussione delle diverse prospettive che vedremo una breve riconsiderazione introduttiva del classico dilemma di Benacerraf (1973), che rimane forse il più importante problema di filosofia della matematica dibattuto negli ultimi decenni, almeno in ambiente analitico (Benacerraf-Putnam 1983, Hart 1996, Morton-Stich 1996), e ritorna ancora (più o meno dichiaratamente) nei dibattiti recenti e attuali (Pataut 2017), benché certamente non abbia più la centralità che aveva fino alla fine del secolo scorso. La filosofia della matematica (si vedano, ad es., Shapiro 2000, Lolli 2002, Piazza 2000) ha visto infatti negli ultimi decenni uno spostamento dei suoi interessi principali da quelli epistemologici e ontologici tradizionali, pur non abbandonati, verso altri temi e problemi, come (per fare solo qualche esempio) quelli intorno alla pratica matematica, ai modi di sviluppo e trasformazione delle teorie matematiche, alle questioni della spiegazione e della comprensione in matematica, ai mutamenti e alla natura della dimostrazione (si vedano, ad es., Mancosu 2008, Linnebo 2017 e l'utile sintesi di Horsten 2022). Qui scegliamo comunque di partire dal problema di Benacerraf soprattutto perché le principali posizioni classiche e recenti in filosofia della matematica possono essere differenziate già soltanto sulla base della loro posizione rispetto ad esso. Si tratta di un problema cruciale per ogni teoria della conoscenza degli oggetti matematici, quindi primariamente epistemologico, ma con premesse e conseguenze ontologiche. Il dilemma è (in prima approssimazione) il seguente: o la verità degli enunciati matematici è assimilabile a quella degli enunciati delle scienze naturali, e allora è inspiegabile la *conoscenza* degli oggetti matematici, dato che non abbiamo apparentemente un accesso alle entità matematiche paragonabile a quello che abbiamo al mondo fisico; o non lo è, ma allora si può dubitare che si tratti ancora di *verità*. Qui si articoleranno brevemente il dilemma e le sue premesse (seguendo sinteticamente ma fedelmente l'esposizione originaria di Benacerraf), si presenteranno alcune tipiche reazioni di fronte ad esso, e si accennerà ad un possibile tentativo di dissolverlo.

Se consideriamo la nozione di verità specificamente in rapporto ai linguaggi della matematica, sia informali che formali, notiamo che le concezioni prevalenti della verità matematica sono state ispirate da due esigenze profondamente diverse: da una parte, l'esigenza di avere una teoria semantica universale omogenea, tale che la semantica delle proposizioni riguardanti oggetti matematici sia parallela a quella per le altre proposizioni; dall'altra, la necessità di integrare la nozione di verità su tali oggetti all'interno di una epistemologia sostenibile. Il dilemma di Benacerraf è espressione del fatto che, almeno apparentemente, tutte le comuni concezioni della verità matematica sono caratterizzate dal fatto che possono soddisfare una di queste due esigenze solo a spese dell'altra. Benacerraf assume (e questo pare ampiamente condivisibile) che qualsiasi spiegazione filosofica soddisfacente della verità, del riferimento, del significato e della conoscenza deve comprendere *tutti* questi concetti, ed essere adeguata a *tutte* le proposizioni a cui questi concetti si applicano. Il dilemma, quindi, è un problema per una certa visione filosofica nel suo insieme. Consideriamo gli enunciati:

(1) Ci sono almeno tre grandi città più antiche di New York.
(2) Ci sono almeno tre numeri perfetti più grandi di 17.

Sembra che essi abbiano la stessa forma logico-grammaticale:

(3) Ci sono almeno tre FG che sono nella relazione R con *a*.

Può sorgere qualche dubbio nel caso del secondo enunciato (per inciso, esso è vero: un numero è perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori propri, e 28, 496 e 8128 sono perfetti; non si sa, al presente, se ci sono infiniti numeri perfetti); infatti, sembrerebbe ovvio che le sue condizioni di verità siano date attraverso la forma (3), ma nella filosofia della matematica, passata e recente, sono state date risposte molto diverse. Ad esempio, Hilbert (almeno nella fase matura del suo pensiero) nega che (3) sia il modello di (2). Anche posizioni di tipo "combinatorio" lo negano: secondo queste posizioni, gli enunciati aritmetici ricevono un valore di verità sulla base di fatti sintattici che li riguardano (di solito, riguardanti la teoria della dimostrazione). Lo stesso vale per le posizioni di tipo convenzionalista.

La visione complessiva della verità e della conoscenza che Benacerraf assume è caratterizzata da due componenti fondamentali. La prima componente è l'esigenza che ci sia una teoria generale della verità, nei termini della quale si possa assicurare che la spiegazione della verità matematica, che viene data, è davvero un spiegazione della *verità* matematica. Ad esempio, se prendiamo la dimostrabilità come condizione di verità, dobbiamo spiegare come si legano verità e dimostrabilità. L'apparato semantico della matematica deve essere visto come parte di quello per il linguaggio naturale in cui (secondo questa prospettiva) la matematica è fatta. Se vogliamo soddisfare questo requisito, (1) e (2) devono chiaramente essere trattate in modo del tutto omogeneo. La nozione tarskiana di verità fornisce sostanzialmente l'unico modo a nostra disposizione per soddisfare il requisito. La seconda componente è il presupposto che noi abbiamo conoscenza matematica, e che tale conoscenza non è meno genuinamente *conoscenza* per il fatto di essere *matematica*. Le condizioni di verità per gli enunciati matematici non devono essere tali che per noi risulti impossibile sapere che esse sono soddisfatte: ci deve essere almeno la possibilità che alcune verità matematiche siano conoscibili. Il problema è che le condizioni di verità degli enunciati matematici (come sono comunemente presentate) sono date in termini di condizioni su oggetti, che per la loro natura (come viene abitualmente concepita) sono del tutto al di là dei mezzi conoscitivi umani che meglio comprendiamo (*in primis* la percezione dei sensi). D'altra parte, non appena mettiamo al centro la nozione di dimostrazione nei suoi aspetti puramente combinatori e non semantici, diventa incomprensibile il suo legame con la *verità* di ciò che viene dimostrato. Questa è l'origine del dilemma.

La concezione, fondamentalmente platonista, che attribuisce all'enunciato (2) la forma (3) è quella che Benacerraf chiama "concezione standard" della verità matematica. Il suo pregio maggiore è che essa risponde immediatamente al problema che affligge tutte le teorie non referenziali della verità matematica: spiegare come si connette la nozione di verità per i linguaggi ordinari, referenziali, con quella per i linguaggi matematici, assunti come irriducibili ai primi. In base alla concezione standard, le definizioni di verità per le teorie matematiche saranno essenzialmente uniformi rispetto a quelle per le teorie empiriche. Ma il difetto di questa concezione dovrebbe essere chiaro: essa sembra palesemente violare il requisito che la spiegazione della verità matematica possa essere integrata armonicamente nella nostra spiegazione complessiva della conoscenza. Infatti, la concezione generale della conoscenza che Benacerraf assume (senza entrare in dettagli epistemologici) mette al centro l'elemento *causale* di essa: affinché qualcuno sappia che l'enunciato S è vero deve esserci una qualche relazione causale tra quella persona, da una parte, e i referenti dei nomi, le estensioni dei predicati e gli oggetti nel dominio dei quantificatori che compaiono in S, dall'altra. Si può aggiungere (seguendo Benacerraf) una teoria causale del riferimento, ma non è chiaro se questa ulteriore assunzione sia indispensabile. Abbiamo così una teoria fondamentalmente empirista della conoscenza, caratterizzata in particolare da un elemento causale esplicito. Le connessioni tra quello che deve accadere se S è vero, e le cause della credenza, possono essere molto varie, ma ci deve essere sempre una *qualche* connessione, tale da mettere in relazione le ragioni della credenza con ciò di cui S parla. Il problema nasce dal fatto che ogni tentativo di combinare questa concezione generale della conoscenza con la concezione standard della verità matematica rende praticamente impossibile la comprensione di come sia possibile la conoscenza riguardante oggetti matematici: è sufficiente pensare all'esempio dei più semplici enunciati aritmetici. Sembra che non rimanga nessuna spiegazione del modo in cui riusciamo a sapere che le condizioni di verità di un qualunque enunciato matematico sono soddisfatte.

Conviene vedere almeno un esempio di concezione standard e uno di concezione combinatoria a cui si applicano le argomentazioni di Benacerraf. Kurt Gödel è un tipico esponente della prima concezione: egli ritiene che gli esseri umani abbiano un qualche tipo di "percezione" *sui generis* anche degli oggetti insiemistici, benché essi siano molto remoti dall'esperienza dei sensi, e che questo spieghi il fatto che gli assiomi sugli insiemi sembrano in qualche modo "imporsi" come veri alla riflessione (vedi Benacerraf-Putnam 1983, 470-486). Ma l'analogia, per quanto suggestiva, sembra rimanere vuota, in quanto manca proprio quello che la seconda condizione richiede: una spiegazione del legame tra le nostre facoltà cognitive e gli oggetti conosciuti; l'assenza di qualsiasi resoconto coerente del modo in cui la nostra intuizione matematica è connessa con la verità delle proposizioni matematiche rende insoddisfacente la nostra teoria generale della conoscenza e della verità. D'altra parte, la visione combinatoria muove dall'assunto che qualunque cosa siano gli "oggetti" matematici, la nostra conoscenza di essi è ottenuta principalmente mediante dimostrazioni. Un esempio di concezione combinatoria è il convenzionalismo, secondo cui le verità della matematica e della logica sono vere per convenzione esplicita (di solito, per postulazione). Quine (vedi Hart 1996, 31-52) ha sollevato contro questa idea la decisiva obiezione che l'uso (comunque necessario) di principi generali per caratterizzare la classe degli enunciati veri (veri per convenzione) *presuppone* la logica. Ma il problema di fondo è che rimane del tutto inspiegato che cosa possa trasformare una semplice attribuzione del predicato "vero" a certi enunciati in una plausibile determinazione del concetto di *verità*. Il difetto delle concezioni combinatorie è che esse evitano quello che sembra un passaggio obbligato per ogni teoria della verità: il passaggio attraverso la considerazione di ciò *su cui* vertono gli enunciati la cui verità viene definita. Le cosiddette "condizioni di verità" che si ottengono rimangono in linea di principio disconnesse proprio dalla *verità* delle proposizioni di cui sono condizioni di verità: manca la connessione tra gli enunciati e ciò su cui vertono; la stipulazione non garantisce la verità.

Alla luce di tutto questo, il dilemma di Benacerraf si può formulare, in estrema sintesi, così: ciò che sembra necessario per una plausibile nozione di verità sugli oggetti matematici sembra rendere impossibile la conoscenza riguardo a tali oggetti. Fondamentalmente, il dilemma testimonia l'incompatibilità dell'ontologia del platonismo con l'epistemologia dell'empirismo. È possibile rispondere a questa sfida? E in caso affermativo, come conviene rispondere? Accenniamo ora (senza alcuna pretesa di completezza, e in modo puramente indicativo ed estremamente semplificato) ad alcune reazioni possibili; ognuna ha i suoi evidenti pregi rispetto al nostro problema, ma d'altra parte ha un prezzo (in certi casi molto alto); ci limiteremo qui a presentarle.

Abbiamo in primo luogo un insieme di possibili risposte al dilemma che sono basate su particolari concezioni degli *oggetti* matematici, concezioni che si allontanano in qualche misura da quella tradizionale, e che in tal modo dovrebbero sfuggire al dilemma stesso; vediamo alcuni esempi. Si può sostenere, in primo luogo, che la nostra credenza nell'esistenza di oggetti astratti (per esempio i numeri naturali) è giustificata (almeno fino a un certo punto) anche in un contesto empiristico, poiché tali oggetti compaiono ineliminabilmente nella migliore spiegazione scientifica complessiva che abbiamo della realtà nel suo insieme; i numeri naturali, in tal senso, sarebbero una sorta (molto particolare) di costrutti teorici (questa posizione, fondamentalmente, è quella di Quine; vedi Hart 1996, 31-52). Ma si può essere più radicali, e ritenere che in realtà *percepiamo* (letteralmente, non in un qualche senso metaforico), oltre che oggetti spazio-temporali macroscopici, anche alcuni tra i più semplici oggetti matematici (tipicamente, insiemi con pochi elementi; questa posizione è stata sostenuta da Maddy in una fase iniziale del suo pensiero; vedi ibid., 114-142). Una diversa strategia consiste nel cercare di fare a meno degli oggetti astratti in quanto tali, proponendo una qualche ricostruzione razionale del loro uso, che permetta di soddisfare al loro scopo senza doverli ammettere come esistenti: per esempio, si può sostenere che gli oggetti astratti attuali (in senso modale) sono ottenibili a partire da *possibilità* (in un senso primitivo e irriducibile di questa nozione modale) di oggetti concreti (è il cosiddetto "modalismo", proposto in origine da Putnam; vedi ibid., 168-185); oppure si può adottare una posizione nominalista, che semplicemente nega l'esistenza di oggetti astratti, e mostra d'altra parte la loro non indispensabilità in matematica (è questo il caso dell'importante programma di Field, ma ci sono anche altri programmi di questo tipo, come quello di Chihara; vedi ibid., 235-272, e Chihara 2004). Infine, si può tentare di evitare l'impegno ontologico su oggetti facendo affidamento sulla nozione di *struttura* come primaria, in matematica, rispetto a quella di oggetto; si tratta delle varie posizioni strutturaliste (come quelle di Shapiro, Resnik e Hellman; vedi Hart 1996, 272-310). Una posizione anti-platonista ancora diversa è quella di Tait (vedi ibid., 142-168), che sottolinea che non esiste (al contrario di quanto ritengono i platonisti) una sola categoria universale di oggetti (e questo offre una immediata via d'uscita dal nostro dilemma).

In alternativa, abbiamo risposte possibili al dilemma che fanno riferimento a particolari concezioni della *verità* o della *conoscenza* matematica, concezioni che sono in realtà abbastanza tradizionali, ma abbastanza lontane da quelle "standard" sopra esposte da poter offrire qualche speranza di soluzione. La ripresa (preceduta dalle ricerche di Boolos) del programma *logicista* (ovviamente ampiamente modificato), negli ultimi decenni, da parte di Wright, Hale e molti altri (vedi ad es. Hart 1996, 185-203), programma che mette al centro la nozione di analiticità (e propone una certa forma di "riduzione" della matematica alla logica del secondo ordine), può offrire una via d'uscita dal dilemma, in quanto se ammettiamo che le fondamentali verità matematiche siano analitiche (in senso freghiano) possiamo anche assumere che la conoscenza di esse prescinda completamente da ogni percezione, e quindi possiamo sperare in una spiegazione non empirista della conoscenza matematica. D'altra parte, si può pensare di adottare qualche forma di *intuizionismo*, e in questo contesto il dilemma non ha più luogo, o perché si respinge la nozione classica di verità, in favore di una forma di verificazionismo ideale universale (come in Dummett), oppure perché (come nell'intuizionismo classico) si ritiene che le asserzioni matematiche siano in qualche modo assimilabili a resoconti di eventi mentali (vedi ibid., 63-95). Infine, c'è la possibilità di adottare posizioni che potremmo definire di tipo "formalistico-combinatorio" (vedi sopra), secondo cui gli enunciati su oggetti matematici (ad esempio, sui numeri naturali) hanno un valore di verità che è determinato puramente da aspetti sintattico-combinatori degli enunciati stessi; in tal modo (come abbiamo visto) il dilemma non sorge, ma solo in quanto rinunciamo completamente alla nozione ordinaria di verità.

Vogliamo ora sottolineare che esiste una prospettiva che si pone in alternativa radicale rispetto a quella assunta da Benacerraf (e da gran parte della recente filosofia della matematica di ambiente analitico), e che rifiuta radicalmente lo scenario di questioni che segue da quest'ultima: si tratta di quello che chiameremo "punto di vista *trascendentale*", pur senza particolari pretese di fedeltà a Kant o al Neokantismo marburghese. Lo discuteremo ampiamente in seguito, in quanto possibile punto di avvio per una riflessione sulla matematica che possa evitare certe dicotomie prevalenti nella maggior parte delle impostazioni nella filosofia della matematica recente (come l'identificazione di oggettività e realtà, in senso fisico o platonico), prendendo come punto di partenza il *fatto* della matematica e risalendo alle condizioni della sua possibilità, al di fuori di ontologie o epistemologie assunte in anticipo (e il naturalismo potrebbe paradossalmente essere un esempio di questo, in quanto potrebbe essere il risultato di una sorta di pregiudizio scientista). Abbiamo infatti il sospetto che (almeno in certa misura) le consuete ontologie ed epistemologie precludano anticipatamente qualsiasi possibilità di comprensione filosofica della concettualizzazione matematica. Ad esempio, invece di chiederci, seguendo Benacerraf, come possiamo avere accesso epistemico alle entità matematiche, potremmo cercare di spiegare perché la matematica *non* ha alcun problema di accesso alle "entità" con cui ha a che fare. A un livello più profondo, potremmo chiederci a quali condizioni possa darsi questa attività, che combina libertà di sviluppo concettuale ed esigenza di verità in modo veramente unico. Ricordiamo a questo proposito un'importante osservazione di Kreisel, secondo cui il modo in cui pensiamo agli oggetti matematici quando facciamo aritmetica o geometria o teoria degli insiemi è realistico, e l'ovvia fonte delle proprietà matematiche che utilizziamo sono intuizioni (*insights*) che interpretiamo come riguardanti oggetti *esterni* (Kreisel 1967, 219). Crediamo che qui "esterno" significhi "fuori dalla mente", e assumiamo che gli oggetti matematici non sono percepibili, e che essi non sono oggetti fisici; quindi, se sono esterni, sono in un *altro* mondo, che miracolosamente vive sopra o sotto o dietro il mondo fisico, e questo pone esattamente il problema dell'accesso epistemico alle entità matematiche. Vorremmo proporre una prospettiva diversa, che parte dal rifiuto di dare ai concetti "esterno" e "interno" qualsiasi significato *prima* dei risultati dell'impresa scientifica: tali concetti sono concetti derivati, che appaiono piuttosto tardi nello sviluppo dell'immagine scientifica del mondo, presupponendo una teoria fisica e una teoria psicofisiologica di un essere percipiente. In altre parole, quello che è esterno e quello che è interno è deciso dalla scienza, per cui, se non si vuole incorrere in una circolarità viziosa, non si dovrebbe porre questa distinzione alla base di una spiegazione epistemologica; e tanto meno si può parlare di "oggetti esterni" riguardo alla conoscenza matematica, che costituisce il nucleo stesso, primitivo logicamente e concettualmente (benché sempre sviluppantesi), dell'intero pensiero scientifico. Questo non significa che possiamo giocare arbitrariamente con i concetti matematici: non possiamo giocare con essi perché c'è una genuina oggettività matematica, che è molto più solida di quella che si potrebbe ottenere dicendo che essa si basa su oggetti esterni. Proprio per la sua natura fondamentale, è difficile caratterizzare questa oggettività, ma una prima approssimazione potrebbe essere la seguente: è un'oggettività *concettuale*, che non è né *nel* mondo né *fuori* di esso, poiché è l'essenziale condizione logica della possibilità di un mondo in generale. Il sapore neokantiano di questa tesi è chiaro, e la discuteremo in seguito. Il punto di vista che ispira le nostre riflessioni, benché sia ancora ampiamente da determinare e sia assunto in modo del tutto sperimentale, è caratterizzato da due componenti fondamentali: da una parte, si considerano gli *assiomi* come il nucleo della matematica, in quanto essi sono *costitutivi* della realtà matematica; sorge quindi il compito di comprendere la natura *sintetica* dell'assiomatizzazione, e le condizioni trascendentali di possibilità di tale sintesi, nel senso che dobbiamo identificare i vari livelli di sintesi, nelle loro forme e nelle loro condizioni, sia rispetto all'assiomatizzazione che rispetto ai modelli; d'altra parte, si assume come tratto cruciale della "realtà" matematica l'*oggettività di concetti*, concetti che, tuttavia, non sussistono come sostanze ontologicamente date, né come costrutti mentali o linguistici, ma come qualcosa che per sua essenza *vale*, in un autonomo dominio di pura validità. Il banco di prova di questa proposta, ciò che prendiamo come dato per l'analisi filosofica, dovrà essere naturalmente il confronto con la pratica matematica.

Capitolo Secondo
Una prospettiva di realismo insiemistico

1. Realismo insiemistico

Tra le diverse vie che si possono prendere per introdurre la questione del *realismo* in filosofia della matematica, scegliamo qui quella che passa attraverso una considerazione della semantica ordinaria dei linguaggi formali, in particolare concentrandoci sul linguaggio della teoria degli insiemi, dato il suo ruolo storicamente centrale nell'ultimo secolo e mezzo nell'ambito dei fondamenti della matematica. Possiamo partire dalla definizione (provvisoria) di realismo matematico proposta da Penelope Maddy (1990, 14): il realismo è la posizione filosofica secondo la quale la matematica è una scienza, i cui oggetti sono entità matematiche che esistono oggettivamente, e i cui enunciati sono veri o falsi a seconda delle proprietà di quelle entità, proprietà che esse possiedono indipendentemente dal nostro linguaggio, dai nostri concetti, dalle nostre teorie, dalla nostra conoscenza in generale. Nel caso specifico e fondamentale della teoria degli insiemi, tale posizione postula una realtà ben determinata di cui gli enunciati della teoria degli insiemi devono essere veri: l'universo (univocamente determinato) degli insiemi, realisticamente inteso. Ma è noto che la semantica ordinaria dei linguaggi formali, in particolare di quello della teoria degli insiemi, è essa stessa essenzialmente insiemistica (anche se ovviamente la relazione tra teoria e metateoria deve rispettare i limiti individuati da Tarski, o almeno una sorta di stratificazione gerarchica): questo dà origine al problema di trovare una semantica per la teoria degli insiemi che non sia (in un certo senso) circolare. Come vedremo, secondo alcuni autori l'unica via d'uscita sembra essere l'ammissione che al livello del fondamento ultimo della teoria degli insiemi non si può fare a meno di una semantica, in una certa misura, *intuitiva*. Saranno proprio queste considerazioni a rendere necessaria una discussione di una certa forma di realismo in filosofia della matematica.

Mostreremo le difficoltà filosofiche apparentemente insormontabili che sorgono quando si tenta di delimitare la nozione di semantica intuitiva per la teoria degli insiemi in modo rigoroso senza rinunciare né alla teoria ordinaria degli insiemi né alla teoria dei modelli consueta, e sosterremo che queste difficoltà derivano dalla natura peculiare (o addirittura dall'irrilevanza) che alcuni problemi, che sorgono naturalmente con altri linguaggi, assumono nel caso dei linguaggi matematici. Il percorso che seguiremo è questo: per prima cosa accenneremo alla concezione iterativa degli insiemi come possibile semantica intuitiva per la teoria degli insiemi; questo ci condurrà al problema cruciale della quantificazione sull'universo degli insiemi; esamineremo quindi un particolare tipo di realismo matematico, esposto per primo da Georg Kreisel (1967, 1967a), che appare in modo naturale come possibile fonte di soluzione al nostro problema. Concluderemo che la forma prospettata di realismo non è una via d'uscita, ma che neanche la semantica ordinaria della teoria degli insiemi ci lega necessariamente a questa filosofia realista della matematica con tutte le sue difficoltà epistemologiche.

Per evitare possibili fraintendimenti, notiamo preliminarmente che il nostro oggetto è la consueta semantica insiemistica della teoria ordinaria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'Assioma di scelta (ZFC), insieme ad alcune conseguenze della sua adozione. Non prendiamo qui alcuna posizione a favore o contro altri trattamenti semantici della teoria degli insiemi: ad esempio, solo per citarne alcuni, quello basato sulla teoria delle categorie di Lawvere-Rosebrugh (2003), quello operazionale di Feferman (2004), quello basato sulla "costruibilità" di Chihara (2004), quello che dipende da qualche forma di quantificazione assolutamente illimitata, sulla falsariga di McGee (2000), o sulla quantificazione plurale (originariamente introdotta da Boolos 1985 per la semantica della logica del secondo ordine). Non perché questi approcci siano irrilevanti rispetto al nostro problema (anzi, sono molto rilevanti), ma perché ci interessa qui l'approccio consueto adottato nella metamatematica modellistica ordinaria della teoria degli insiemi, come viene praticata dalla maggior parte dei matematici che lavorano sui vari modelli della teoria (o all'interno di essi); la letteratura che tratteremo di seguito riguarda lo stesso problema, che sorge quando si accetta la semantica ordinaria, modellistica, della consueta teoria degli insiemi (qui, ZFC). I sostenitori di teorie alternative possono prendere alcuni degli argomenti seguenti come ulteriori ragioni per abbandonare la semantica insiemistica ordinaria (o addirittura la teoria ordinaria degli insiemi), sebbene questo non sia il nostro scopo, e si possa supporre che alcuni dei problemi che sorgono in questo contesto siano così fondamentali per la semantica in generale da riemergere (anche se certamente con caratteristiche diverse) negli altri contesti.

Possiamo partire dalla seguente citazione, che esprime in modo chiaro una visione ampiamente condivisa da alcuni matematici e filosofi della matematica:

> *C'è* un elemento metafisico caratteristico della semantica e, in particolare, della concezione semantica della verità degli enunciati matematici, elemento metafisico rappresentato dalla postulazione di una realtà, qualunque essa sia, di cui gli enunciati matematici sono veri (Dales-Oliveri 1998, 22).

Ebbene, questa è forse una delle migliori formulazioni possibili (in poche parole) della posizione *opposta* rispetto a quella che intendiamo sostenere, ma non tenteremo di confutarla direttamente: piuttosto, cerchiamo di assumere un punto di vista diverso, in cui "l'elemento metafisico rappresentato dalla postulazione di una realtà" risulta in ultima analisi irrilevante per la semantica dei sistemi formali.

Quando si considerano i fatti più basilari sulla relazione tra semantica e teoria degli insiemi, emergono tre ragioni immediate per cercare una semantica intuitiva per la teoria degli insiemi: in primo luogo, la necessità di una nozione generalizzata di interpretazione (essendo l'universo degli insiemi una classe propria e non un insieme); in secondo luogo, la necessità di applicare la condizione dell'esistenza nell'universo di una struttura che soddisfi gli assiomi alla stessa gerarchia degli insiemi; infine, il fatto che non esiste una definizione di verità per l'universo stesso. La risposta a questa esigenza di una semantica intuitiva per la teoria degli insiemi è solitamente data nei termini della concezione iterativa dell'universo, suggerita dal lavoro di Ernst Zermelo verso il 1930 (vedi Zermelo 1930). Forse i tentativi classici più importanti di giustificare gli assiomi di ZFC sulla base della concezione iterativa (dopo Gödel 1947/64) furono realizzati da Shoenfield (1967, 238-240; 1977, 322-327; si veda anche Scott 1974), Boolos (1971) e Wang (1974, 1977). Hallett (1984, cap. 6) ha invece notato la circolarità della giustificazione degli assiomi sulla base della concezione iterativa, e l'ambiguità della nozione di completabilità sottesa alla concezione stessa (nozione cruciale perché per giustificare gli assiomi sulla base del fatto che producono collezioni completabili bisogna spiegare in che senso le collezioni ottenute sono completate). Pertanto la concezione iterativa, considerata come semantica intuitiva per la teoria degli insiemi, presenta (malgrado il suo valore in sé) un difetto di fondo, che potrebbe far sorgere dubbi sulla sua idoneità a risolvere il problema che ci interessa; il difetto riguarda il concetto stesso di completabilità: o è inteso in modo quasi-costruttivo, contraddicendo la natura degli assiomi di ZF che ci si proponeva di giustificare; oppure è inteso in senso lato, presupponendoli.

Ma il nucleo del problema della semantica per la teoria degli insiemi è la questione della quantificazione su tutti gli insiemi: è questa, a nostro avviso, la questione centrale. Ci sono due caratteristiche apparentemente incompatibili nella descrizione comune della gerarchia cumulativa: da un lato, i quantificatori illimitati sugli ordinali sono destinati a variare su tutti gli ordinali minori di un dato ordinale fissato, e i quantificatori illimitati in generale sono destinati a variare su insiemi di tipo inferiore a quello corrispondente a quell'ordinale. Altrimenti, come ha osservato Kreisel (1965, 101), il significato delle espressioni quantificate sarebbe ben definito solo presupponendo che esista una collezione composta da tutte le collezioni, il che è falso per la struttura intesa. D'altro canto, l'intento che sta alla base della quantificazione illimitata è chiaramente quello di comprendere l'intero universo degli insiemi, qualunque cosa possa essere. Naturalmente, queste caratteristiche non sono affatto in contraddizione: piuttosto, la loro interazione è la forza trainante dello sviluppo della teoria degli insiemi e (inestricabilmente) della sua teoria dei modelli.

Ma c'è ancora bisogno di una chiarificazione filosofica di questo esempio lampante di "dialettica" tra potenza e atto. Quando usiamo la logica classica con enunciati che coinvolgono la quantificazione sull'universo degli insiemi, sembra che presupponiamo che sia perfettamente definito quali insiemi esistano. Ciò potrebbe essere usato come una sorta di reductio per l'uso della logica classica in questo contesto: poiché la molteplicità di tutti gli insiemi è irriducibilmente potenziale, non dovremmo applicarvi la quantificazione classica. Rimangono aperte due strade: o è semplicemente un errore usare in questo caso la logica classica (questa è la strada scelta, con riserva, da Lear 1977, di cui discuterò tra poco le argomentazioni, come in alcune recenti proposte "potenzialiste"); oppure la teoria classica degli insiemi è insufficiente a coprire tutti i modi possibili di riunire molteplicità in unità. In quest'ultimo caso, la teoria classica degli insiemi non può distinguere l'universo da un insieme sufficientemente grande, che è costituito proprio da tutti e soli quei modi di riunire molteplicità in unità che sono incorporati nella teoria stessa: i principi di riflessione sono la formulazione rigorosa proprio di questa idea. La formulazione di Parsons del problema di fondo è molto chiara:

> Sembra che ci troviamo di fronte a un'ambiguità nella nozione di interpretazione intesa della teoria formalizzata degli insiemi: la teoria sembra riguardare un "universo" definito che siamo tentati di concepire come l'analogo di un insieme, e alle formule della teoria può essere dato un senso in modo tale che questo universo sia un insieme, ma prenderlo in questo modo falsifica l'intento, e per lo meno comporta un uso del linguaggio della teoria degli insiemi che non sarebbe passibile di un'interpretazione con lo stesso insieme come universo (Parsons 1974, 91).

È proprio questo il problema centrale: la semantica sembra richiedere essenzialmente che l'universo sia un insieme; non appena proviamo ad afferrare il dominio di quantificazione, esso ci sfugge di mano e ci ritroviamo con un insieme, non con l'universo come volevamo.

> Da questo punto di vista, se considero i tuoi quantificatori in modo che comprendano "tutti" gli insiemi, ciò può solo mostrare (da una prospettiva "superiore") la mia mancanza di una concezione di insieme più ampia della tua. Ma allora sembra che sia sempre possibile una prospettiva secondo la quale le tue classi sono, in realtà, insiemi (Parsons 1974a, 219).

Questa è una descrizione corretta di ciò che sta accadendo; tuttavia, siamo riluttanti a parlare, con Parsons (ibid.), di un'ambiguità sistematica del linguaggio della teoria degli insiemi. Questa apparente ambiguità è solo il sintomo di un fenomeno piuttosto profondo, che tipicamente si verifica nella teoria degli insiemi: il fatto che nessuna totalità, nessuna molteplicità di natura insiemistica può coprire in modo completo il dispiegarsi delle interpretazioni sempre più elevate della teoria assiomatica. La parola "ambiguità" è fuori luogo se viene usata in opposizione alla presunta unicità dell'universo degli insiemi: dovremmo mettere in discussione l'idea, realisticamente intesa, di un mondo insiemistico la cui essenza è destinata a rimanere sfortunatamente per sempre ineffabile, semplicemente a causa della debolezza e della dipendenza dal contesto del nostro linguaggio matematico. Al contrario, è la natura matematica stessa di quell'universo a provocare i fenomeni di cui stiamo parlando, e la pretesa di eliminarli, per quanto allettante, appare semplicemente prescientifica.

Abbiamo accennato poco sopra alla proposta alternativa di Lear (si veda Lear 1977 e inoltre Paseau 2001, 2003 per una discussione): alla base di questa proposta c'è l'idea che l'estensione di "insieme" sia sempre passibile di sviluppo (e i principi di riflessione possono essere visti come la realizzazione tecnica di questa idea). Lear propone di utilizzare i modelli di Kripke della logica modale per tenere conto dello sviluppo dell'estensione del concetto di insieme. La semantica che si ottiene è ovviamente non classica, nel senso che se p è falsa in t, non possiamo inferire che la negazione di p sia vera in t; essa è vera in t se e solo se p è falsa in tutti gli indici accessibili da t. Analogamente, gli enunciati universalmente quantificati sono veri in t se e solo se, in qualunque modo l'estensione del concetto di insieme possa accrescersi, tutte le loro esemplificazioni sono vere nell'universo che ne risulta. Ma, come sottolinea Lear, se adottiamo questa semantica non classica dobbiamo affrontare un dilemma: o certi insiemi in determinati momenti sono collezioni che non vengono "afferrate" (nel senso che l'appartenenza ad esse non è fissata una volta per tutte); oppure l'Assioma dell'insieme potenza è falso. Qui diventa evidente la debolezza della posizione di Lear: tale assioma è falso se accettiamo la seconda alternativa del dilemma (assumendo ragionevolmente che la prima sia inaccettabile); ma è falsa sulla base della semantica adottata da Lear, e ciò getta un'ombra di reductio (filosofica) sul dilemma, nel senso che potrebbe essere semplicemente una reductio della proposta di Lear di utilizzare una semantica non classica.

È proprio a questo punto che viene naturale prendere in considerazione una forma di realismo matematico che è a prima vista il miglior candidato per una dissoluzione forse definitiva del problema che finora abbiamo discusso. Prendiamo come punto di partenza la definizione provvisoria di realismo matematico di Maddy (1990, 14) data sopra: il realismo sarebbe la posizione filosofica secondo la quale la matematica è una scienza, i cui oggetti sono entità matematiche esistenti oggettivamente (accettiamo che questa caratterizzazione non ulteriormente specificata abbia senso), e i cui enunciati sono veri (o falsi) sulla base delle proprietà di quelle entità, proprietà che esse hanno indipendentemente dal nostro linguaggio e dalla nostra conoscenza. Questa forma di realismo si presenta come una soluzione drastica ma efficace al problema della semantica per la teoria degli insiemi, poiché sembra consentire di uscire dalla circolarità della semantica insiemistica per la teoria degli insiemi semplicemente postulando quella realtà ben determinata, a cui gli enunciati della teoria assiomatica degli insiemi devono corrispondere, che è l'universo degli insiemi. Ciò fornisce una risposta semplice alla domanda che ci preoccupava in precedenza: che cosa significa "tutti gli insiemi"? Significa semplicemente: tutti gli insiemi, cioè tutti i membri dell'universo degli insiemi realisticamente inteso. Non escludiamo qui che altre interpretazioni filosofiche generali (non realistiche) della matematica siano in grado di fornire soluzioni generali altrettanto buone (o addirittura migliori) al nostro problema; ma sembra che tali soluzioni difficilmente siano adatte ai consueti sistemi formali della teoria degli insiemi, sviluppati nel contesto della logica classica e profondamente compromessi con l'infinito superiore.

Ma è discutibile che si possa attribuire al realismo la proprietà che vorremmo attribuire ad esso come essenziale in questo contesto: la proprietà che lo rende (apparentemente) indispensabile per dare una soluzione al nostro problema, vale a dire il fatto che esso garantirebbe l'univocità dell'interpretazione del linguaggio formale (in altre parole: la determinatezza dell'oggetto del discorso insiemistico). In primo luogo, se gli assiomi sono di fatto presupposti nella costruzione della gerarchia cumulativa, la gerarchia non può infondere loro la determinatezza che essi non hanno; in secondo luogo, si potrebbe sostenere che il fatto che la semantica della teoria degli insiemi sia essa stessa insiemistica la sottopone a tutte le "patologie" dei linguaggi formali, e l'unicità dell'interpretazione è (come è noto da alcuni fondamentali risultati metateorici) la prima cosa che va perduta (riprenderemo più avanti questo argomento); infine, ci sono buoni argomenti per sostenere che l'alternativa del passaggio a linguaggi di ordine superiore non sia una via d'uscita (qui semplicemente lo assumeremo). Insomma, il bisogno di unicità appare, allo stesso tempo, ineludibile e impossibile da soddisfare.

Come abbiamo sopra accennato e vedremo ampiamente in seguito, esiste una prospettiva che è un'alternativa radicale al realismo, rifiutando la formulazione stessa delle domande che consegue da presupposti realisti: lo abbiamo chiamato "punto di vista trascendentale". È fondamentale, assumendo tale punto di vista, considerare gli assiomi come costitutivi della realtà matematica, per cui si pone il compito di comprendere la natura sintetica dell'assiomatizzazione e le condizioni trascendentali di possibilità di tale sintesi. Considerando specificamente la semantica della teoria degli insiemi, ciò significa che dovremmo individuare i vari livelli di sintesi, nelle loro forme e nelle loro condizioni, sia rispetto all'assiomatizzazione (estensioni assiomatiche mediante ipotesi di esistenza di grandi cardinali o altro) sia rispetto ai modelli. La natura insiemistica che accomuna la teoria degli insiemi e la teoria dei modelli ordinarie dovrebbe essere il punto di partenza di qualsiasi riflessione sul problema della semantica per la teoria degli insiemi. La teoria dei modelli non è una sorta di ispezione ingenua del "mondo" comune in cui vivono tutte le diverse strutture matematiche: si tratta piuttosto di una teoria matematica a sé stante, che necessita del suo background di teoria degli insiemi e, reciprocamente, fornisce alla teoria degli insiemi molto di ciò di cui quest'ultima ha bisogno. Questo punto è forse meglio chiarito osservando il carattere peculiare della teoria dei modelli della teoria degli insiemi: questo non è un sintomo del fatto che abbiamo finalmente raggiunto una sorta di "linguaggio naturale" della matematica (che sarebbe presumibilmente il linguaggio della stessa teoria degli insiemi); si tratta invece di un chiaro esempio di ciò che accade (matematicamente) quando non si possono più tener separate una teoria matematica formale, la sua semantica, e la teoria degli insiemi su cui quest'ultima è costruita. Non possiamo più pensare ingenuamente che questi livelli siano "assoluti" e abbiano alla base la "realtà" matematica stessa; possiamo provvisoriamente fingere di credere che sia così quando sviluppiamo (ad esempio) la teoria dei modelli delle teorie algebriche; ma quando trattiamo i modelli della teoria degli insiemi non possiamo evitare questa apparente circolarità: siamo costretti a rinunciare al nostro precedente (presunto) buon senso e ad affrontare questa circolarità, finalmente, in modo genuinamente matematico. Possiamo così continuare a sviluppare la teoria degli insiemi con la sua semantica ordinaria, senza per questo doverci impegnare ad accettare quella filosofia realista che si presume imposta da quella semantica, una filosofia che è problematica dal punto di vista epistemologico.

2. Intuizione e interpretazione

Il problema cruciale per le prospettive di realismo insiemistico, come abbiamo visto, si può riformulare come il problema di caratterizzare la nozione di *conoscenza extra-assiomatica o informale o intuitiva* del *modello inteso* della teoria degli insiemi. Ma la questione della caratterizzazione della nozione di modello inteso della teoria degli insiemi in quanto possibile oggetto di conoscenza informale può essere affrontata solo rispondendo a una domanda più fondamentale: *che cos'è un'interpretazione*? Benacerraf sottolinea giustamente che il passo decisivo verso quello che egli considera il "disastro skolemita" (con un'espressione colorita, che ha origine nella vasta letteratura sulle conseguenze filosofiche del teorema di Löwenheim-Skolem e del presunto paradosso che ne conseguirebbe, che non è ora il nostro argomento, benché sia ovviamente correlato) è proprio un'interpretazione del termine "interpretazione", vale a dire l'idea che un'interpretazione «è solo un ulteriore enunciato che correla predicati ad estensioni in un qualche dominio fissato. Una sorta di super-assioma. Generalizzato, questo quadro può rivelarsi fatale» (Benacerraf 1985, 104). In effetti, a prima vista il quadro paventato sembra immediatamente atto a produrre un regresso all'infinito, o peggio la putnamiana "skolemizzazione di assolutamente tutto", che ci lascerebbe senza alcuna giustificazione per il modo in cui usiamo le nostre parole (in generale, non solo in matematica): è questo ciò che Benacerraf giustamente paventa. Ma ci si potrebbe chiedere cos'altro potrebbe essere un'interpretazione, in matematica. Consideriamo il caso molto semplice in cui diamo, in generale, un'interpretazione di un linguaggio formale: scegliamo un dominio, e definiamo una funzione di interpretazione assegnando estensioni ai predicati, e così via. Naturalmente questa scelta e questa assegnazione solitamente non sono esprimibili nel linguaggio che stiamo interpretando; ma è facile dare in un linguaggio naturale una descrizione informale dell'interpretazione, e con poco sforzo possiamo stabilire una opportuna metateoria semantica formale in cui l'interpretazione è realmente esprimibile (nei casi consueti, in cui usiamo schemi di assiomi) da una singola formula. Nel caso della teoria degli insiemi, possiamo addirittura utilizzare una metateoria semantica "debole" (come la teoria degli insiemi di Kripke-Platek con l'Assioma dell'infinito, KPI), in cui possiamo definire formalmente tutte le nozioni semantiche, fino alla nozione di soddisfacimento in modelli che siano insiemi (ma non classi proprie). Questo caso è una delle situazioni più controintuitive, perché abbiamo una metateoria semantica insiemistica che collega la teoria formale degli insiemi con strutture insiemistiche, e questo produce come è noto spettacolari cortocircuiti concettuali (si veda Lolli 1985). Ma una volta osservata e riconosciuta come inevitabile la distinzione tra i diversi livelli teorici (teoria, metateoria, etc.), non si hanno più i disastri paventati da Benacerraf. Matematicamente non abbiamo bisogno di alcuna interpretazione intuitiva come ultima risorsa, e possiamo accettare senza problemi la sovrapposizione indefinita di livelli (meta)teorici, accettando anche il fatto che la presunta realtà insiemistica in un certo senso non potrà mai essere raggiunta, pur mantenendo tutto ciò di cui abbiamo bisogno dal punto di vista matematico. Ma Benacerraf è così preoccupato dalle possibili conseguenze dell'identificazione delle interpretazioni con ulteriori oggetti linguistici, che vuole evitarla con tutte le sue forze, ritenendola superflua: «l'apparente necessità di un tale ulteriore enunciato deriva dalla confusione tra un linguaggio senza un'interpretazione esplicitamente e visibilmente unita ad esso ed un linguaggio *non* interpretato – un linguaggio aperto a tutti i modelli (e non modelli) come interpretazioni ammissibili» (ibid., 105).

Ora, c'è un senso in cui è vero che non abbiamo bisogno di un enunciato del genere: semplicemente, possiamo formularlo senza problemi in una metateoria adeguata, se vogliamo; ma è solo nel contesto di una certa impostazione filosofica, che qui stiamo mettendo in discussione, che ha senso richiedere un'interpretazione del linguaggio come una necessità imperativa. Solo in quel contesto si può soccombere alla tentazione di considerarla come un ulteriore "super-assioma", a sua volta avente bisogno di interpretazione, con il conseguente regresso implicato in questa mossa. Benacerraf si muove in un contesto filosofico in cui si presuppone che o un linguaggio non è interpretato, e quindi esposto a tutti i possibili disastri della "skolemizzazione", oppure è interpretato (anche se implicitamente) in una semantica fondamentalmente intuitiva, e quindi sano e salvo. Ma i linguaggi matematici non sembrano affetti da questa dicotomia radicale: nella consueta pratica matematica essi sono perfettamente in ordine come linguaggi non interpretati. Questo non va inteso nel senso di un formalismo ingenuo: il punto è piuttosto che i matematici di solito formulano definizioni, dimostrano teoremi, cercano ulteriori conseguenze di assiomi e poi le dimostrano, anche senza intraprendere esplicitamente alcuna interpretazione; ci sono casi in cui necessitano di interpretazioni, ma non per lo scopo, esterno alla matematica, di comprendere finalmente ciò che dice il linguaggio formale; piuttosto, il loro scopo è vedere se lo studio dal punto di vista della teoria dei modelli dell'interazione tra diverse strutture, o anche delle proprietà intrinseche di una struttura specifica, può aiutarli nella ricerca di nuovi teoremi o nello sviluppo di nuovi principi assiomatici. Ma allora quella di Benacerraf è solo apparentemente un'osservazione di buon senso: il linguaggio della teoria degli insiemi è un linguaggio non interpretato, che non solo non ha alcuna interpretazione esplicitamente collegata, ma è tale che anche le sue possibili interpretazioni implicite (in quanto descrizione dell'universo degli insiemi, etc.) sono del tutto irrilevanti finché non si decide di studiarle per risolvere problemi di teoria dei modelli o di teoria della dimostrazione (come le questioni di indipendenza), o di estendere la teoria rafforzandone la base assiomatica. Perfino in questo caso le interpretazioni possibili acquistano rilevanza entrando matematicamente in gioco solo nella misura in cui sono veri e propri oggetti matematici, cioè interpretazioni, modelli, etc., nel senso di una metateoria *matematica*, che non è altro che una versione adeguata della stessa teoria degli insiemi. Potremmo sfidare chiunque a fornire un solo esempio di un passaggio, in una trattazione matematica della teoria degli insiemi, in cui si fa appello esplicito o anche implicito alla presunta interpretazione intuitiva, non semplicemente a scopo euristico, ma per ottenere la conclusione di un argomento matematico, e saremmo sicuri di vincere la scommessa, poiché anche i casi apparentemente necessari di ricorso a una sorta di semantica naturale per il linguaggio della teoria degli insiemi sono in realtà assimilabili a qualsiasi altro uso matematico di quel linguaggio (pena il possibile venir meno del legame di conseguenza logica tra assiomi e conclusione).

Dobbiamo però considerare a questo punto un'obiezione apparentemente solida contro l'argomentazione sulle interpretazioni appena formulata, obiezione in cui la nozione cruciale di matematica intuitiva o informale emerge esplicitamente in tutta la sua forza: «Il significato di "∈" e il dominio dei quantificatori devono limitare la classe delle interpretazioni ammissibili *se si vuole che la versione formalizzata mantenga la connessione con la matematica intuitiva con cui ha avuto inizio la teoria degli insiemi* – se si vuole che sia una formalizzazione *della teoria degli insiemi*» (Benacerraf 1985, 106, corsivo nostro). Ma il "significato" del simbolo di appartenenza è assolutamente irrilevante dal punto di vista della dimostrazione, a meno che non lo sostanziamo isolando una sottoclasse della classe originaria di strutture per mezzo di ulteriori assiomi (ad esempio, le consuete ipotesi di grandi cardinali). Qualunque sia la nozione di significato che si adotti, si potrebbe sostenere che il significato in una teoria matematica è pienamente incorporato nell'interazione tra assiomi e modelli; ma tutti i possibili modelli di certi assiomi sono matematicamente alla pari, a meno che non rafforziamo la teoria; quindi non possiamo aspettarci da un presunto "significato" indipendente del simbolo di appartenenza una restrizione nella classe delle interpretazioni. Né possiamo aspettarcelo dal dominio dei quantificatori: come abbiamo visto sopra, la quantificazione sull'universo degli insiemi è notoriamente una nozione quanto mai sfuggente, dalla quale (comunque si decida di affrontarla) non possiamo certo aspettarci quella specificazione univoca della nozione di insieme di cui qui si avrebbe bisogno. La "versione" formalizzata, se si accetta provvisoriamente questa terminologia un po' fuorviante di Benacerraf, è già una formalizzazione genuina e adeguata della teoria degli insiemi, indipendentemente da qualsiasi presunto "significato" del simbolo di appartenenza o restrizione del dominio di quantificazione. Ciò non contraddice il fatto che possiamo renderla, in un certo senso, sempre più adeguata come formalizzazione della teoria degli insiemi, rafforzandola secondo le necessità intrinseche del concetto di insieme che emergono successivamente, mediante uno studio sempre più approfondito degli assiomi dei grandi cardinali e dei loro modelli.

3. L'informale in matematica

L'idea (storicamente corretta) che i sistemi formali consueti per la teoria degli insiemi siano versioni formalizzate di una teoria matematica informale preesistente ha comunque un'innegabile attrattiva filosofica, tanto che gran parte del dibattito attorno al relativismo insiemistico ("skolemita" e non solo, che qui entra in gioco pur non essendo il nostro tema principale) si impernia, al suo livello più profondo, sulla relazione generale tra *matematica formale e informale*. John Myhill dice qualcosa di molto interessante e rivelatore su questo punto, osservando che la matematica formale presuppone e dipende da una «comunità informale di comprensione» tra i matematici (Myhill 1951, 50), e sembra indicare con questo una sorta di "comunanza informale nell'intendere" (se così possiamo dire) condivisa dai matematici. Ma una volta compresa correttamente l'idea stessa di matematica informale, gran parte del suo fascino filosofico svanisce: non dovremmo aspettarci troppo da essa in termini di potere esplicativo. La matematica è essenzialmente formale, almeno nel senso ovvio che nessuna dimostrazione dipende dalle caratteristiche specifiche degli oggetti di cui ci si occupa, ma solo da quelle proprietà degli stessi che sono codificate negli assiomi e nelle loro conseguenze logiche. "Matematica informale" è forse allora un altro nome per tutta la "prosa" che precede e circonda il testo formale: è superflua in linea di principio, anche se euristicamente, psicologicamente e pedagogicamente il suo ruolo è fondamentale. Un forte argomento a favore della sua dispensabilità è che nella storia recente della matematica, caratterizzata da un crescente processo di assiomatizzazione e (da più di un secolo) di formalizzazione, non troviamo un solo concetto matematico informale che abbia resistito indefinitamente a qualsiasi trattamento formale (i concetti semantici non sono un controesempio, poiché mostrano solo la necessità di "aprire" i nostri sistemi indefinitamente verso sistemi più forti). Questa lunga esperienza di assiomatizzabilità e formalizzabilità dà una forte conferma (anche se in un certo senso solo sperimentale e induttiva) alla visione filosofica (indipendente) secondo cui in matematica tutto è essenzialmente formalizzabile in linea di principio, e concetti e teorie informali possono prima o poi essere portati al livello formale, anche se al momento non sappiamo come farlo. Tuttavia, la tesi di Myhill, secondo cui la matematica formale dipende da una comunità informale di comprensione dei matematici, merita di essere discussa. La tesi ha un certo fascino, ma riteniamo che la sua plausibilità dipenda da un'ambiguità fondamentale nel suo significato. Myhill potrebbe intendere due cose diverse: o che qualsiasi teoria matematica formale (ad esempio ZFC), per essere compresa, utilizzata e sviluppata, richiede essenzialmente una specifica comprensione informale che ogni matematico deve condividere con i suoi colleghi, se vuole lavorare con quella teoria e non con qualcos'altro; oppure, che esiste un livello fondamentale, necessario in generale per la comunicazione, la comprensione, il significato, etc., in cui dobbiamo essere compartecipi di una "comunità informale di comprensione" (nelle parole di Myhill). Il primo senso è chiaramente peculiare alla matematica, o almeno a un'attività teorica formale (ad esempio, alcune fasi dell'elaborazione di una teoria fisica, prima del confronto sperimentale con la realtà); il secondo è molto più generale, coinvolge il problema del significato in tutta la sua forza pervasiva e non è particolarmente legato ai linguaggi matematici o formali, anche se la matematica può essere il luogo in cui è più facile mostrare quanto radicali siano i problemi in gioco. Ma anche se questi problemi siano notoriamente gravi e difficili, essi hanno scarsa connessione specifica (a parte la loro pervasività) con le questioni che stiamo discutendo; eppure sembra che gran parte del fascino delle parole di Myhill derivi, più o meno consapevolmente, dal secondo senso. Che così debba essere, lo si può facilmente dedurre da una breve riflessione sul primo senso: al riguardo, si potrebbe obiettare che non è richiesta alcuna specifica comunità informale di comprensione in nessuna fase del lavoro matematico; una volta che operiamo con un sistema formale in modo sintatticamente corretto e deduciamo conseguenze logiche mediante un sistema deduttivo standard di logica del primo ordine (naturalmente accorciando praticamente sempre il nostro percorso mediante metaregole e principi idonei e attendibili di deduzione abbreviata), siamo sicuri che stiamo facendo matematica esattamente nel modo in cui volevamo, e non si pongono problemi scettici di comprensione, comunicazione o solipsismo. Certo, i matematici, per comunicare, devono almeno condividere lo stesso linguaggio; ma questa obiezione non è pertinente, qui, perché riguarda il problema generale della comprensione e del significato, e non ha nulla a che fare specificatamente con i linguaggi matematici; è chiaro che per avere comunicazione in generale devono essere soddisfatte molte condizioni, ma sembra che queste condizioni non possano fare alcuna differenza nel contesto dell'attuale discussione sul ruolo della matematica intuitiva e informale.

Comunque, il modo più promettente per dare un senso alla "comunità informale di comprensione" di Myhill potrebbe essere il ricorso a una classica tesi che compare in questo genere di discussioni: la cosiddetta *tesi dell'uso*. Il suo contenuto è semplice: la spiegazione della comprensione informale delle teorie matematiche deve essere data in termini (vagamente wittgensteiniani) di uso del linguaggio. La tesi dell'uso nasce dalla constatazione delle difficoltà che comportano i tentativi di dare una spiegazione plausibile del significato in matematica identificandolo con il riferimento. Questo appello all'uso è interessante, ma il termine è così filosoficamente sovraccarico che è necessario essere più specifici. L'idea è che il regresso delle interpretazioni ha termine, in pratica, quando ricadiamo nella *lingua madre* del discorso matematico informale (si veda Shapiro 1990, 251), e ciò si spiega con una visione filosofica secondo la quale «si comprendono i concetti racchiusi in un linguaggio nella misura in cui si sa usare correttamente quel linguaggio» (ibid., 252). Si noti che qui si adotta la tesi dell'uso come tesi sulla *comprensione*, piuttosto che sul *significato* (ma ciò non sembra fare una differenza decisiva nell'applicazione della tesi in questo contesto) e si assume inoltre che la tesi dell'uso, di per sé, «non richiede un'ontologia antirealista, né una semantica non tarskiana» (ibid., 254). Questa idea che l'identificazione della comprensione delle nozioni matematiche con la conoscenza del loro uso corretto sia compatibile con la consueta semantica tarskiana e con un'ontologia non antirealista (qui nel senso limitato che si ammette il principio del terzo escluso) sembra ammissibile, limitatamente a questo contesto (mentre se si prende l'ontologia realista in senso platonista, e la semantica tarskiana come un modo metamatematico per esprimere quell'ontologia, allora non c'è modo di conciliare la propria visione con qualsiasi forma, per quanto debole, della tesi dell'uso). Il punto è che la tesi dell'uso sembra avere un effetto immediato sulla questione dei modelli intesi dei linguaggi formali, in particolare della teoria degli insiemi: ogni relativismo pare eliminato. Se cosa sono i numeri naturali è stabilito dal nostro uso del linguaggio dell'aritmetica, e cosa sono gli insiemi è dato dal nostro uso del linguaggio della teoria degli insiemi, allora apparentemente non esiste più il "grado di libertà" per preservare i fenomeni di relatività dell'interpretazione. Ma è davvero così? In che senso, ad esempio, il nostro uso del linguaggio aritmetico, dai suoi esempi più semplici fino alla speculazione più raffinata nella teoria dei numeri, determina in modo univoco (a meno di isomorfismi) una singola struttura? In generale, sembra che il semplice contenuto matematico dei teoremi di Löwenheim-Skolem (indipendentemente da qualsiasi interpretazione filosofica) e di tutti quei risultati metateorici che dimostrano l'esistenza di modelli non standard dei sistemi formali fondamentali sia che il nostro uso (se usiamo un linguaggio finitario del primo ordine) è compatibile con modelli non intesi, che entrano in scena inaspettatamente e magari contro la nostra volontà, ma non alterano minimamente il nostro uso. Non si deve, quindi, scaricare sull'uso ciò che il linguaggio di per sé non è in grado di realizzare. Non neghiamo che in generale l'uso degli enunciati di una teoria sia rilevante per la selezione dei modelli della teoria; ma questo avviene come un fatto matematico naturale, nel senso che le teorie assiomatiche, nelle quali i concetti matematici hanno il loro proprio ruolo e il loro proprio significato, sono il fattore decisivo sia nel fissare l'uso dei termini coinvolti, sia nel delimitare una classe di interpretazioni come la classe dei modelli della teoria, nello stesso momento: quel "momento" (logico, non temporale, ovviamente) in cui emerge la teoria assiomatica stessa; non si dovrebbe quindi pensare all'uso come una sorta di antidoto all'indesiderata pluralità dei modelli. In conclusione, sebbene la tesi dell'uso di per sé possa essere generalmente plausibile, almeno come condizione necessaria per la comprensione, appare insufficiente a risolvere il problema da cui siamo partiti. Riteniamo che la chiave per una corretta comprensione delle questioni qui in gioco, e forse una via per la loro possibile soluzione, si ottenga solo quando si sottolinei il più possibile ciò che divide radicalmente i linguaggi formali da quelli naturali, non ciò che li unisce: in questo senso, nel caso della matematica il ricadere in una presunta "lingua madre" risulta impossibile e illusorio.

La tesi dell'uso mostra quindi la sua debolezza, non tanto come tesi filosofica generale, quanto come tentativo di soluzione al problema fondamentale di spiegare la nozione di conoscenza informale del modello inteso della teoria degli insiemi e, più in generale, di dare un senso alla "comunità di comprensione" che starebbe alla base della matematica informale. Ma che cos'è la matematica informale? Torniamo a questa domanda. Il primo problema è che apparentemente non abbiamo mezzi per determinare che cosa faccia esattamente la differenza tra la matematica informale e la sua "controparte" formale. È difficile dire che cosa potrebbe essere la matematica informale, se la si considera non semplicemente come la fase euristica della matematica, ma come la pietra di paragone del significato matematico. La matematica informale, quando è matematica vera e propria, appare così simile alla matematica formale che i dubbi sul significato filosofico della distinzione sono del tutto naturali. Abbiamo come dato il rapporto tra «due linguaggi, uno ben più preciso e comprensivo dell'altro» (Klenk 1976, 482). Ma anche una breve riflessione su questi linguaggi mostra che «la matematica intuitiva dovrebbe essere vista come qualcosa di meno, e non di più, della nostra matematica formale: meno precisa, meno coerente, forse, e meno completa» (ibid.). Sappiamo che alcune impostazioni nella filosofia della matematica attribuiscono un'importanza fondamentale alla matematica intuitiva, forse come reazione a tutti i fenomeni inaspettati che caratterizzano i linguaggi formali e i sistemi formali, emersi da quando la logica matematica ha ottenuto i suoi risultati classici. Ma si potrebbe sostenere che è giusto invertire l'ordine di priorità filosofica, e riconoscere che concettualmente (anche se quasi mai storicamente) la matematica formale ha la preminenza. Sul piano della precisione e sulla possibilità di valutazione della coerenza e completezza questa preminenza è evidente; quanto alla precisione e al rigore, non c'è bisogno di discutere; quanto alla coerenza, sembrerebbe una questione di "tutto o niente", per cui l'espressione di Klenk "meno coerente" sembra avere poco senso. Tuttavia, in molti casi possiamo valutare il "grado di conoscenza" della coerenza di una teoria in nostro possesso; le intuizioni preformali si sono rivelate in alcuni casi notevoli contraddittorie (si ricordi la teoria ingenua degli insiemi), e in ogni caso, le teorie formali consentono un controllo incomparabilmente migliore del problema, anche nei casi (la maggioranza) in cui non abbiamo dimostrazioni di coerenza (neppure relative). Infine, per quanto riguarda la completezza, è difficile anche solo formulare correttamente il problema, nel caso della matematica informale, e in ogni caso abbiamo ancora una volta una consapevolezza molto migliore dei livelli di (in) completezza nel caso della matematica formale. Ma se la matematica preformale soffre di questi difetti, come potremmo aspettarci da essa un aiuto per la determinazione del contenuto intuitivo di quei concetti che sembrano sfidare ogni caratterizzazione formale?

Sembrerebbe allora naturale assumere una posizione *formalista*. In effetti Klenk si orienta espressamente in tale direzione, nel senso seguente: «forse la morale della storia è che gli insiemi (e i numeri) sono proprio ciò che gli assiomi ci dicono che sono, e qualsiasi insieme di oggetti che soddisfi questi assiomi andrà bene come modello della teoria degli insiemi» (ibid. 484). Una posizione simile sembra essere sostenuta anche da Hallett, che conclude la sua discussione sul "paradosso" di Skolem (Hallett 1994) sostenendo una prospettiva in senso lato hilbertiana, in cui la teoria assiomatica degli insiemi ha una posizione centrale, insieme alla *natura logica delle interrelazioni* (questa è un'espressione russelliana) tra i costrutti teorici coinvolti. Contro queste idee "formaliste" si obietta di solito semplicemente che la definizione di una classe di strutture è qualcosa di completamente diverso dalla definizione degli elementi di una struttura o delle loro relazioni. Ma sotto la confusione tra i due tipi di definizione potrebbe nascondersi una tesi filosofica non banale, seppure espressa con una terminologia infelice, e nel giusto senso filosofico di "definizione" tale tesi non è così strana: sebbene sia vero che una volta isolata una classe di strutture non abbiamo (di solito) alcuna definizione dei suoi elementi, si potrebbe comunque sostenere che in matematica non è necessaria una definizione del genere, poiché quello che ci interessa sono concetti formali, il cui valore è dovuto alla loro astrattezza (l'esempio migliore è dato, come al solito, dalle nozioni algebriche). Anche nei casi tipici in cui si cerca una struttura privilegiata (interi, numeri reali, insiemi) non siamo interessati a presunti oggetti specifici, ma solo alle loro caratteristiche strutturali generali espresse negli assiomi formali. Se non siamo soddisfatti dei nostri assiomi, poiché sono insufficienti per operare le distinzioni concettuali che vogliamo (non solo pragmaticamente, ma quelle distinzioni che ci vengono imposte durante la nostra riflessione matematica) cerchiamo nuovi principi, conformi alle nostre esigenze, anche se non sempre siamo così fortunati da trovarli. Tutto ciò non va inteso in senso formalista (potrebbe piuttosto puntare verso una posizione strutturalista, ma non è questa la sede per discutere questa possibilità): per i nostri scopi attuali, è sufficiente sostenere che gli insiemi *non* sono semplicemente gli oggetti che soddisfano certi assiomi, gli assiomi di un'unica assiomatizzazione storicamente data (sebbene qualsiasi assiomatizzazione ragionevole sia un'approssimazione al concetto di insieme). Gli assiomi non "definiscono" (delimitando una classe di strutture) il concetto di insieme una volta per tutte; al contrario, c'è una forte spinta verso un'ulteriore specificazione di quel concetto, dalla quale siamo condotti allo sviluppo della teoria degli insiemi attraverso le sue estensioni assiomatiche. Ma questo processo non è governato da una precedente "percezione" intuitiva dell'universo assoluto, essendo invece il risultato del dispiegarsi delle strutture concettuali incorporate nelle nostre teorie matematiche in continuo sviluppo.

Qualsiasi tentativo di dare un senso alla nozione di comprensione informale del modello inteso della teoria degli insiemi sembra dunque destinato al fallimento. La reazione di Benacerraf di fronte a questo è interessante, innanzitutto per la sua forza istintiva: «La ragione per cui non abbiamo un paradosso di Skolem, e la ragione per cui le nozioni della teoria degli insiemi *non* sono relative nel senso di Skolem, è che non c'è motivo di trattare la teoria degli insiemi secondo la teoria dei modelli [*model-theoretically*] – il che *non* vuol dire che non c'è motivo di studiare la sua teoria dei modelli» (Benacerraf 1985, 108). Sebbene non sia difficile mostrare l'inevitabilità del carattere insiemistico della teoria dei modelli (ordinaria), qui dovremmo prendere sul serio l'altra direzione di questa intricata relazione, vale a dire il fatto che rimanga all'interno alla teoria dei modelli ogni tentativo di caratterizzazione matematica dell'universo degli insiemi. Il punto è che la ragione per cui il "paradosso" di Skolem non è affatto un paradosso è proprio il fatto che la teoria degli insiemi può essere affrontata mediante gli strumenti forniti dalla teoria dei modelli: è solo attraverso questi strumenti, in opposizione a ogni intuizione, per quanto raffinata, che possiamo distinguere attentamente le corrispondenze biunivoche che sono all'interno di un modello da quelle che sono all'esterno di esso, e di conseguenza evitare il paradosso di un continuo apparentemente numerabile. Una delle conseguenze di questa inevitabile trattazione della teoria degli insiemi per mezzo della teoria dei modelli è, certo, una sorta di relatività della teoria delle nozioni insiemistiche, ma non necessariamente nel senso di Skolem: è proprio lo studio dei modelli della teoria degli insiemi che consente di formulare attentamente e di tenere sotto controllo le conseguenze delle proprie assunzioni, fornendo una conoscenza genuina dei diversi livelli di relatività e di assolutezza che possono essere raggiunti in ogni caso specifico. Questo è ciò che chi si occupa di teoria degli insiemi fa nel proprio lavoro quotidiano, ed è molto più di una dichiarazione generale di relatività delle nozioni insiemistiche, o della reazione dogmatica di affermare un'assolutezza fondata su una presunta conoscenza "intuitiva" dell'universo degli insiemi. Benacerraf rileva che il suo oppositore deve sostenere «niente meno che il principio secondo cui gli unici concetti matematici che abbiamo sono quelli che si realizzano [*are embodied*] in tutti i modelli delle nostre teorie matematiche sotto la formalizzazione del primo ordine. Ma questo è un principio la cui stessa espressione richiede concetti matematici (modelli, teorie del primo ordine, etc.) che hanno essi stessi – e si deve ritenere che abbiano – un contenuto intuitivo, affinché esso abbia senso» (ibid., 109). A questa obiezione possiamo rispondere che i concetti matematici richiesti per l'espressione del principio considerato potrebbero essere presi addirittura come privi di contenuto intuitivo, e tuttavia il principio avrebbe ancora senso: la circolarità implicata in ogni caratterizzazione matematica delle nozioni sintattiche o semantiche non è viziosa, ma è al contrario una caratteristica inevitabile della stessa matematizzazione di quelle nozioni, che acquistano il loro senso proprio proprio nel corso della progressiva assiomatizzazione e formalizzazione della matematica. Questa è forse una delle lezioni più profonde della logica del '900: una volta che le nozioni apparentemente intoccabili di linguaggio, teoria, interpretazione, modello, dimostrazione, operazione effettiva diventano veri e propri oggetti di indagine matematica al pari di altre nozioni più classiche, non possiamo tornare, per così dire, a una precedente "età dell'innocenza", che in realtà era un'età di ignoranza. È inutile appellarsi, come ultima risorsa, al teorema di Tarski: è vero che una nozione di verità adeguata per l'intero universo degli insiemi non può essere definita nel linguaggio formale della teoria degli insiemi, ma non per questo chi lavora sui modelli perde il diritto di usare i principi formali di quella teoria; basta che rispetti le limitazioni tarskiane (o limitazioni analoghe) sulla definibilità. In tal modo, non si è costretti a tornare ad una comprensione intuitiva, ma piuttosto si è spinti verso livelli metateorici sempre più alti, sempre in una progressiva matematizzazione, assiomatizzazione e formalizzazione delle proprie "intuizioni" provvisorie, talvolta confuse. I filosofi (e anche i matematici) sono talvolta tentati di chiedersi: questo passaggio indefinito da una teoria alla sua metateoria è necessario, ma quando e come potremo finalmente affrontare la *realtà* a cui la teoria si riferisce? Dopo il movimento "verso l'alto" si vorrebbe finalmente scendere alla base solida dell'interpretazione intesa. Ma si dovrebbe resistere sia alla domanda sia all'apparente necessità che esprime: tale esigenza è perfettamente corretta quando una teoria riguarda il mondo fisico; si può plausibilmente esigere (ed auspicare) che la fisica, a un certo livello, prima o poi, sia sperimentalmente connessa con il mondo fisico, in quanto non è possibile spiegare il significato e il valore epistemico dei termini fisici e delle teorie fisiche senza arrivare a una chiara distinzione tra teorie, da un lato, e realtà, dall'altro; ma le cose stanno diversamente nel "mondo" dei concetti matematici e delle teorie matematiche.

4. Linguaggi matematici formali

Il problema generale che sottostà a questa intera discussione, come dovrebbe essere chiaro a questo punto, è il problema del rapporto tra *linguaggio matematico e realtà matematica*. Ci sono due posizioni estreme. Secondo la prima, il linguaggio è fondamentale, e la "realtà" matematica sarebbe una copia spettrale, che riproduce semplicemente le articolazioni del linguaggio. In questa prospettiva, i linguaggi numerabili hanno necessariamente uno status privilegiato, il che non significa negare che si possano trovare generalizzazioni adeguate di tutti i risultati sulle teorie del primo ordine ai linguaggi del primo ordine con un vocabolario non logico non numerabile, o che ci siano risultati tecnici profondi sui linguaggi infinitari; significa affermare che la conoscenza dell'infinito necessaria per ideare linguaggi non numerabili o infinitari passa attraverso una precedente teoria degli insiemi infiniti, formulata in un linguaggio finitario numerabile. Secondo la seconda posizione, la realtà matematica viene per prima, e i linguaggi sono strumenti, quasi sempre inadeguati, necessari alla nostra mente per confrontarsi con l'infinito, una realtà che trascende essenzialmente le nostre insufficienti facoltà intellettive ed espressive. Da questo punto di vista, il fatto che una quantità numerabile di formule richieda una quantità numerabile di oggetti è semplicemente il sintomo della limitazione patologica dei nostri mezzi linguistici, e mostra solo l'inadeguatezza del linguaggio: non è un effetto rilevante della formalizzazione sulla nozione che noi possiamo avere della realtà matematica. Ma queste due posizioni, spesso dibattute, non sono le uniche possibili; i difetti di entrambe dovrebbero essere evidenti, e sono stati più volte evidenziati nella letteratura; raramente però viene individuato il loro difetto fondamentale comune, cioè il fatto che entrambe trascurano la metà di un dato epistemologico essenzialmente *duplice*: linguaggio e realtà, mezzi di espressione numerabili e strutture (anche) più che numerabili, concetti finiti e oggetti infiniti. Questo potrebbe suggerire la direzione per una possibile nuova prospettiva: prendere in considerazione entrambi i lati del problema e accettare come punto di partenza il fatto che gli insiemi più che numerabili si danno matematicamente (di solito) nei linguaggi numerabili. Al di là delle possibili interpretazioni filosofiche, resta un fatto: la matematica dell'infinito non è una sorta di esperienza mistica di pura contemplazione dell'ineffabile; al contrario, essa trova sempre una fase di formulazione linguistica concreta. Questo non sembra un mero accidente psicologico, quanto piuttosto il segno che il linguaggio è una componente essenziale della costruzione matematica dei concetti, una condizione della loro possibilità (per usare nuovamente un'espressione kantiana), e tuttavia qualcosa di aperto a una sorta di trascendenza essenziale, motivo per cui c'è un autentico progresso nella nostra conoscenza dell'infinito. Ma questo bisogno di trascendenza, per così dire, non deve assumere tratti metafisici: dovremmo riconoscere questa esigenza di trascendenza come intrinseca all'attività matematica stessa, in quanto pur lavorando con concetti e non avendo nient'altro con cui lavorare, non siamo tuttavia imprigionati una volta per tutte nella "rete concettuale" che abbiamo stabilito. Al contrario, le relazioni tra concetti si sviluppano in modo autonomo, in modo tale che si stabiliscono tra di essi connessioni sempre più profonde, e noi dobbiamo riconoscerle e ricondurle a un'adeguata estensione della rete che avevamo in precedenza. È come se il mondo concettuale che costituisce una qualsiasi teoria matematica avesse una vita propria, ma una vita a cui possiamo sempre dar forma nella conoscenza e che possiamo ricondurre progressivamente al linguaggio.

Conviene però a questo punto evidenziare alcune conseguenze, solitamente trascurate, dell'adozione della semantica tarskiana per i linguaggi formali, in modo da riconoscere e comprendere in modo più chiaro alcuni effetti dell'atto stesso della formalizzazione che sono rilevanti per i problemi fin qui discussi. Con la semantica di Tarski si sono rese disponibili per la prima volta definizioni rigorose di nozioni informalmente utilizzate in matematica fino a quel momento, ma non ancora matematizzate a loro volta: le nozioni di struttura, di interpretazione, di modello. Questo enorme progresso ha potuto e può tuttora generare l'illusione di avere finalmente una formulazione precisa della classica teoria "corrispondentista" della verità, che ben si adatta alle esigenze dei linguaggi formali della matematica, che vengono così privati di ogni aspetto anomalo e riportati alle caratteristiche e alle funzioni di qualsiasi linguaggio comune. Ma questa è solo un'apparenza superficiale. Riflettiamo innanzitutto sul fatto che la possibilità di una definizione rigorosa della nozione di interpretazione non può costituire l'aspetto filosofico più importante della semantica tarskiana, dal momento che la definizione non presenta una reale novità concettuale (e Tarski ne era ben consapevole). La vera rivoluzione concettuale della semantica (almeno per le questioni che qui ci interessano) sta nel fatto che essa rivela le *condizioni* per una definizione rigorosa di interpretazione. Da un lato, non possiamo più fingere di ignorare che in matematica il riferimento è dato mediante definizioni che appartengono a una teoria matematica, solitamente una teoria degli insiemi; dall'altro, i linguaggi perdono ogni status separato e misterioso, divenendo “oggetti” matematici sullo stesso piano di tutti gli altri “oggetti” matematici, solitamente definiti nella stessa metateoria insiemistica in cui vengono definite le strutture: strutture e linguaggi sono due tipi di “oggetti” di un’unica metamatematica insiemistica. Questo fenomeno risulta particolarmente chiaro e netto quando si formalizza la metateoria della teoria degli insiemi, sia sintattica che semantica. Ma da un certo punto di vista questa è una situazione sconcertante: tutto il linguaggio della teoria degli insiemi, in cui vengono trattati entrambi i termini della relazione semantica (il “linguaggio” matematico e la “realtà” matematica), è a sua volta un linguaggio matematico, e necessita di una propria interpretazione; questo ulteriore passo è possibile in una meta-metateoria; ma nel caso della teoria degli insiemi quest’ultima è proprio la stessa teoria degli insiemi da cui si è partiti. Ciò vale sia dal lato del linguaggio, che è sempre riducibile alla struttura induttiva di certe algebre libere, a qualunque livello, anche se è l’ambito in cui tutti i rapporti tra la propria struttura (come linguaggio) e le strutture nel senso dei modelli possono essere formulati e discussi, sia dal lato delle strutture. Per quest’ultimo, a meno che non si voglia considerare la nozione di soddisfacimento in classi proprie, è sufficiente un debole frammento della teoria iniziale, per cui non si ha nemmeno la classica stratificazione metateorica, anche se non va dimenticato che per poter considerare i modelli della teoria degli insiemi come insiemi e non classi proprie i grandi cardinali hanno un ruolo decisivo. Quindi, da una parte abbiamo un argomento a favore della sostanziale coincidenza di “teoria” e “realtà” nella teoria degli insiemi, non nel senso formalista secondo cui l’unica “realtà” degli insiemi è il linguaggio della teoria degli insiemi, ma nel senso che questa realtà non ha caratteristiche proprie al di là di quelle che si danno nella teoria (con tutti i suoi sviluppi). D’altra parte, i grandi cardinali si rivelano non solo la via per risolvere molte questioni che rimangono aperte in ZFC, ma l’unico modo (senza ricorrere a specifiche teorie delle classi, che possono essere considerate metodologicamente problematiche) per ottenere insiemi a partire da classi proprie, e quindi per sviluppare la teoria dei modelli della teoria degli insiemi senza soccombere alle sue circolarità. Quindi, contro ogni forma di misticismo riguardo al presunto rapporto ineffabile tra linguaggio e realtà, contro l’idea che le regole della proiezione non siano rappresentabili nel disegno (per usare una famosa immagine wittgensteiniana), possiamo sostenere che in matematica non c'è alcun problema nel dare una descrizione autoreferenziale ma non paradossale di quel rapporto. Qui linguaggio e realtà sono due facce della stessa medaglia, sicché la teoria matematica *come struttura concettuale*, che costituisce l'oggetto proprio di un dato linguaggio matematico, può riflettere su se stessa, spiegando sia la sua espressione simbolica che la propria "realtà" come oggetto astratto. Tuttavia, viene naturale trascurare questa "duplice unità", dimenticandone uno dei lati e cadendo nell'illusione della diretta trasparenza del significato. Questo è ciò che accade quando la semantica tarskiana viene (mal)intesa come una buona ragione per limitarsi al puro discorso insiemistico, in cui vengono considerate solo le strutture, lasciando cadere ogni riferimento ai linguaggi. Come sottolinea (opponendosi) Gabriele Lolli, «qui si realizza la perenne aspirazione dei matematici a parlare "naturese"» (Lolli 1985, 225). Al contrario, questo desiderio è destinato a restare insoddisfatto, poiché le strutture come oggetto del discorso insiemistico puro costituiscono uno dei lati di una realtà unica, l'altro lato della quale è proprio la teoria degli insiemi nella sua espressione mediante un linguaggio formale. Il problema che sta alla base di questi malintesi è la "coincidenza" tra teoria e metateoria per la teoria assiomatica degli insiemi. Questa "coincidenza" getta una luce peculiare sul teorema di Tarski, facendone un'apparente ragione per postulare un livello informale ultimo che dovrebbe essere l'orizzonte onnicomprensivo della teoria degli insiemi. È vero che il teorema di Tarski impedisce qualsiasi formalizzazione insiemistica della nozione di verità nell'universo, ma questa circostanza, lungi dall'essere una buona ragione per postulare una sorta di comprensione intuitiva capace di raggiungere una sorta di immediata trasparenza del significato, è la forza motrice che guida la matematica nella sua ascesa verso orizzonti metateorici sempre più estesi, poiché il teorema di Tarski dimostra che l'indefinibilità della verità è sempre *relativa*.

I linguaggi matematici non sono assimilabili ai linguaggi naturali, per ragioni profonde: è la natura *formale* della matematica (nel senso della pura "formalità" del rapporto di conseguenza logica tra assiomi e teoremi) a precludere qualsiasi confronto con i linguaggi naturali, anche a livello meramente metaforico. Anche la teoria degli insiemi, il candidato più promettente al ruolo di linguaggio naturale della matematica, è solo un linguaggio molto pervasivo e basilare, che può (se si vuole) essere assunto come orizzonte onnicomprensivo (sempre provvisoriamente, e solo se la teoria viene opportunamente estesa), ma non il "linguaggio della natura" definitivo per il "mondo" matematico. In altre parole, «la formalizzabilità dei testi matematici non è la garanzia della loro corretta e rigorosa espressione, ma la leva mediante la quale essi vengono, malgrado tutte le apparenze e le analogie, staccati dal discorso comune come un affresco dal suo fondo, e riportati allo stesso status di tutti i linguaggi formali» (Lolli 1985, 227). Ma quali sono allora, in profondità, le conseguenze della formalizzazione, nello scenario della semantica insiemistica tarskiana? Sembra che la prima conseguenza, che apre un abisso incolmabile tra i linguaggi formali e qualsiasi linguaggio ordinario, sia l'inevitabilità del riflettersi sulla metateoria degli effetti della metateoria stessa sulla teoria: il teorema di completezza, dimostrato nella metateoria, implica l'esistenza di modelli non standard di qualsiasi teoria avente modelli infiniti; ma poiché la metateoria della teoria degli insiemi è la stessa teoria degli insiemi, abbiamo quella sorta di "conflazione" tra teoria e metateoria che "contagia" quest'ultima con l'indeterminatezza della prima. Il secondo effetto della formalizzazione è il fatto che non si può confondere la metateoria con la teoria di un modello: l'identificazione della metateoria con la teoria di un modello è proprio l'errore filosofico fondamentale alla base di ogni tentativo di giustificare gli assiomi della teoria degli insiemi sulla base di una previa descrizione dell'universo degli insiemi. Una terza conseguenza è la relatività della nozione di "standard": un modello può assumere il ruolo di modello standard rispetto ad un altro modello, pur essendo non standard rispetto ad un altro modello ancora; non esiste un modo assoluto per escludere quest'ultima possibilità, poiché ogni atto di interpretazione matematica, ogni attribuzione di significato ad un termine matematico, a differenza degli atti di interpretazione che riguardano i linguaggi naturali (o comunque fanno un uso essenziale di elementi causali o indicali), si attua necessariamente nel passaggio da una teoria all'altra. Insomma, «la coincidenza tra teoria e metateoria, che per certi versi favorisce la lettura di un testo matematico come un discorso in lingua naturale, non appesantito da una semantica posticcia e separata, è proprio la spia attraverso cui se ne coglie il distacco» (Lolli 1985, 230).

Si può sostenere che la matematica non si riferisce ai suoi oggetti al modo degli altri linguaggi, compresi quelli delle discipline scientifiche. Questo è il motivo per cui alcune visioni filosofiche isolano persistentemente la matematica in una sorta di limbo, onorandola verbalmente come la conoscenza più alta, ma di fatto ignorando i suoi problemi e le sue caratteristiche specifiche, che spesso si oppongono all'ontologia, all'epistemologia e alla filosofia del linguaggio che si assumono. Oppure, andando all'estremo opposto, la matematica è considerata come una parte della nostra migliore teoria del mondo, una parte che si confronta con l'esperienza insieme alla fisica e che può parimenti essere falsificata (almeno in linea di principio). Tipicamente, le filosofie empiriste o neo-empiriste oscillano tra questi due estremi. Più in generale, si potrebbe arrivare a sostenere che la matematica sarà sempre una pietra d'inciampo per tutte quelle visioni filosofiche, empiriste o realiste, che rifiutano di riconoscere un ambito autonomo di validità in cui *sussistono*, *valgono* relazioni concettuali, senza avere una realtà, un'esistenza specifica. Come osservava acutamente a questo proposito Ernst Cassirer (di cui nel seguito discuteremo ampiamente le posizioni in filosofia della matematica):

> Il significato [*Grundsinn*] puramente funzionale del numero viene comunque ignorato, sia che si cerchi di ricavarlo dalla "esistenza" empirica delle cose, sia che si cerchi di dedurlo dalla "essenza" logica dei concetti. Infatti in entrambi i casi il numero non significa una forma originaria dell'atto del porre [*Setzung*], ma richiede qualcosa di già dato e presupposto [...]. Non rapporti tra oggetti, ma sempre e soltanto puri rapporti tra atti del porre [*Setzungsverhältnisse*], rapporti che risalgono alle funzioni dell'atto che fissa l'unità [*Einheits-Setzung*] e dell'atto che stabilisce la differenza [*Verschiedenheits-Setzung*], del porre in successione e dell'aggiungere, possono giustificare l'aprioricità dei giudizi matematici e la specifica "evidenza" che è il loro tratto distintivo (Cassirer 1929, 439s.).

D'altra parte, il fatto che la matematica "parli" dei suoi "oggetti" in questo modo molto caratteristico è la ragione per cui la matematica ha un ruolo centrale come linguaggio universale della scienza, segnando i confini (sempre in movimento) del pensiero astratto in generale. Il carattere peculiare del discorso matematico fu riconosciuto molto presto nella tradizione filosofica, forse già (benché in una forma in qualche modo "mistica") nel pensiero pitagorico, e certamente da Platone. La tradizione di ciò che i neokantiani di Marburgo (non solo Cassirer, ma anche il suo maestro Paul Natorp e già il fondatore della scuola, Hermann Cohen) chiamavano "idealismo", che comprende almeno (oltre a Platone) Galilei, Cartesio, Leibniz, Kant, gli stessi neokantiani e (in qualche misura) Husserl, attribuisce un'importanza fondamentale alla natura specifica della matematica e al suo ruolo costitutivo, sia nella teoria della conoscenza che nell'ontologia. Solo con lo sviluppo della logica matematica, però, disponiamo di risultati *matematici* che consentono una corretta (anche se ancora parziale) comprensione scientifica di questa specificità, comprensione talvolta sorprendente e forse inquietante, ma che non può essere ignorata in nome di vecchi pregiudizi filosofici.

Tornando al problema principale, concludiamo che se si devono prendere sul serio la natura formale e la formalizzabilità dei linguaggi matematici, non si può più rifiutare di assumere tali linguaggi come un veri e propri oggetti matematici. Ciò però «è assolutamente repellente al matematico, che coerentemente con la sua disposizione di fondo si rifiuta di considerare come oggetto il proprio linguaggio naturale» (Lolli 1985, 231). Ma questo rifiuto istintivo, che è facile ottenere quando si presentano alcuni risultati sorprendenti della logica matematica a matematici che non la conoscono, è un atteggiamento che si potrebbe considerare addirittura prescientifico. Il rifiuto di considerare i linguaggi matematici come oggetti matematici ha conseguenze negative anche sulla comprensione della natura dell'interpretazione: una interpretazione è, in ultima analisi, un atto di correlazione tra linguaggi formali; si interpreta un formalismo in un altro, ed entrambi i formalismi sussistono nella stessa teoria di fondo, che non è il formalismo definitivo, ma un quadro aperto per formalismi sempre più forti; il fatto notevole è che nel caso della teoria degli insiemi l'atto stesso dell'interpretazione è rappresentabile nella teoria. Questi atti di interpretazione di formalismi in altri formalismi hanno un ruolo epistemologico centrale: «si potrebbe sostenere infatti che solo tali atti sono fonte di conoscenza, nel senso in cui questa si realizza nella scienza» (ibid., 234). Eppure si è tentati di rifiutare la molteplicità dei sistemi di rappresentazione, l'indefinita pluralità dei diversi modi in cui gli oggetti matematici trovano modo di essere espressi nei diversi linguaggi matematici, e la teoria degli insiemi può generare l'illusione che abbiamo finalmente un sistema definitivo che rende obsoleti tutti gli altri sistemi, eliminando la necessità stessa della rappresentazione; presumere questa "chiusura" della teoria degli insiemi su se stessa (come linguaggio naturale della matematica, trasparente e autosufficiente) è però solo la conseguenza di un'errata interpretazione del fenomeno della "conflazione" di teoria e metateoria di cui abbiamo parlato: un fenomeno certo sorprendente, ma niente affatto paradossale e anzi matematicamente fecondo.

Capitolo Terzo
Una prospettiva neokantiana

1. Cassirer filosofo della matematica

Con l'intento di delineare alcuni tratti di una possibile prospettiva *neokantiana* nella filosofia della matematica, che tenga conto non solo degli sviluppi postkantiani della matematica e della scienza matematica della natura, ma anche di quello che la logica matematica, lo studio dei fondamenti e le vicende delle diverse impostazioni fondazionali del secolo scorso ci hanno insegnato, prenderemo ora in considerazione i principali contributi di Ernst Cassirer in questo campo, discutendone solo qualche aspetto più rilevante allo scopo che ci siamo prefissi (e rimandando per una valutazione di altri aspetti a Mormann 2008, Heis 2010 e Biagioli 2020). Scegliamo Cassirer perché crediamo che nessuno come lui abbia saputo, con tale rigore storiografico, consapevolezza degli sviluppi contemporanei e impegno teoretico originale, considerare ancora valida un'impostazione kantiana in filosofia della matematica, malgrado la necessità di una sua profonda revisione e rielaborazione per via dei limiti teorici e storici della filosofia della matematica di Kant rispetto alla matematica successiva (e già per certi aspetti a quella a lui contemporanea).

Partiamo dal primo lavoro di Cassirer esplicitamente ed esclusivamente dedicato a questioni di filosofia della matematica. Si tratta dell'articolo del 1907 *Kant und die moderne Mathematik* (Cassirer 1907), che contiene le sue prime riflessioni sulla filosofia della matematica di Kant, nate come reazione diretta alla severa critica cui tale filosofia era stata sottoposta da parte del logicista Louis Couturat (1904, 1905), e che costituiscono un confronto fondamentale per il pensiero di Cassirer, una presa di coscienza dell'impossibilità di impostare qualsiasi concezione critica della logica e della matematica (e, in realtà, di impostare l'intera filosofia critica) senza tener conto dei profondi sconvolgimenti che queste avevano subito a partire dalla seconda metà dell'800 e nei primi anni del secolo scorso. Proviamo a leggere questo lavoro di Cassirer alla luce di alcuni sviluppi successivi della logica e dello studio dei fondamenti della matematica, non per rivolgere in modo antistorico all'autore rilievi a partire da idee e risultati che semplicemente non poteva conoscere, ma per valutare criticamente, alla luce di quanto oggi sappiamo, alcuni aspetti di una prospettiva che si pone, sin dai primi anni del secolo scorso, in contrasto con una delle tradizioni dominanti degli studi fondazionali, la tradizione logicista (su questo contrasto si veda in particolare Heis 2010; sul logicismo, Boccuni-Sereni 2022). Premettiamo, a questo proposito, che i testi con cui Cassirer si confronta sono essenzialmente due: i *Principles of Mathematics* di Russell (1903) e *Les Principes des Mathématiques* di Couturat (1905).

Iniziando dalla discussione del concetto di numero naturale, troviamo un elemento che rimarrà caratteristico anche delle successive riflessioni cassireriane sul concetto di numero (si vedano in particolare: Cassirer 1910, I-2; 1929, III-4; 1940 I-4): la preminenza della posizione in un *ordine* sull'aspetto cardinale di ogni singolo numero come molteplicità costituita di unità. Tale preminenza consegue dalla teoria del concetto come unità di una regola funzionale, e dalla (speculare) critica alla teoria classica dell'astrazione: si tratta di punti-chiave della filosofia di Cassirer, che ritornano in tutte le sue opere, e vi torneremo a breve. Per ora ci limitiamo ad osservare che proprio a partire dalla contrapposizione della fondazione ordinale a quella cardinale del concetto di numero Cassirer oppone Dedekind da una parte a Frege e Russell dall'altra (Cassirer 1910, I-2, in particolare le sezioni 2 e 3), in modo così netto che si apre un problema di interpretazione: è Cassirer a fraintendere deliberatamente Dedekind per i suoi scopi, o piuttosto deve essere messa in discussione l'interpretazione di un Dedekind che fonderebbe il concetto di numero sul concetto di insieme in modo filosoficamente sostanzialmente neutrale? Non possiamo affrontare qui tale questione, che meriterebbe di essere approfondita (si veda, ad es., Yap 2017). In ogni caso, l'insistenza sulla primarietà della posizione in un ordine rispetto ad altri aspetti nel concetto di numero naturale non può non richiamare alla mente del lettore contemporaneo una concezione che in larga misura insiste proprio su questo stesso aspetto, vale a dire quella che Paul Benacerraf propose, almeno problematicamente, nel famoso saggio *What numbers could not be* (Benacerraf 1965), e che può considerarsi all'origine di molte delle successive e attuali posizioni strutturaliste in filosofia della matematica. Ma ci sono altri casi in cui, pur in un contesto che resta molto lontano e talvolta difficilmente confrontabile con quello attuale, alcuni punti di vista di Cassirer conservano tutta la loro forza. Ad esempio, discutendo dei numeri irrazionali e del continuo, dopo aver ribadito che *esser dato*,

> qui, dove ci muoviamo interamente nel dominio delle pure posizioni ideali, non può significare altro che completa determinatezza logica, che l'univocità di un'operazione concettuale (Cassirer 1907, 14),

Cassirer asserisce:

> non l'"intuizione" dello spazio o del tempo è ciò in cui dobbiamo cercare la spiegazione e la fondazione della continuità, ma, all'opposto, possiamo arrivare ad una comprensione propria del continuo spaziale e temporale solo allorché abbiamo prima sviluppato e portato ad una chiara espressione logica il *concetto* generale di continuità (ibid., 15),

e poco oltre:

> Il pensiero, in particolare, che il concetto matematico di continuità venga formato secondo il modello e il prototipo di un qualche *continuo fisico* in qualche modo esistente e da esso venga colto mediante l'esperienza, è divenuto ormai del tutto insostenibile (ibid., 19).

La non banalità di questo punto di vista, secondo cui la continuità non viene ricavata come risultato dall'osservazione ma viene *premessa* ad essa *come regola*, risalta chiaramente, ad esempio, di fronte a tutti i tentativi che sono stati fatti (anche recentemente) di fondare la teoria degli insiemi, e quindi la costruzione stessa del continuo, a partire da una facoltà intuitiva (non intellettuale) che dovrebbe arrivare addirittura a percepire *sensibilmente* gli oggetti più semplici della teoria degli insiemi (si veda, ad esempio, Maddy 1980). Per contro, Cassirer insiste su una fondazione concettuale del continuo, accettando così pienamente quella sostanziale *intellettualizzazione* della matematica che è uno dei punti di maggior distacco del neokantismo marburghese da Kant e di maggior avvicinamento a Leibniz (si veda, su questo tema, Ferrari 1988, 253-290). Si tratta di una intellettualizzazione che comunque rimane caratterizzata da un aspetto tipicamente kantiano, in quanto comunque fondata sull'idea di sintesi a priori, e quindi in grado di sfuggire all'alternativa tra analitico e sintetico a posteriori tipica delle impostazioni positivistiche, vecchie e nuove.

Ci sono invece punti in cui, a nostro parere, si sente tutta la distanza che ci divide da Cassirer, per esempio laddove egli tratta del concetto cantoriano di insieme, dopo aver introdotto l'ampliamento del dominio numerico nel transfinito. Dopo aver asserito che una classe è «pienamente determinata e distinta da ogni altra, quando noi pensiamo in qualche modo una relazione generale in cui tutti i suoi membri stanno rispetto a un determinato termine dato» (Cassirer 1907, 26), l'autore sottolinea che «la legge della relazione è ciò che fissa univocamente il suo "campo" – sia esso finito o infinito – e fa di esso un contenuto del pensiero in sé determinato» (ibid., 27). Le questioni che sottostanno a queste osservazioni apparentemente non impegnative sono tutt'altro che semplici: si tratta essenzialmente della contrapposizione tra la concezione logica di *classe* in quanto estensione di un predicato, come oggi comunemente si riconosce in filosofia della matematica, contrapposta alla concezione matematica di *insieme* come oggetto ottenuto in modo (come si dice) "quasi-combinatorio" nella gerarchia cumulativa. Che Cassirer propenda per la prima concezione, viste le sue letture e l'epoca in cui scrive il saggio che stiamo considerando, non ci stupisce; il problema è che, anche alla luce di altri scritti posteriori (in particolare: Cassirer 1910, I-2; 1929, III-4; 1940, I-4), sembra che gli sfugga un elemento decisivo della moderna (a partire da Cantor) teoria degli insiemi: precisamente l'aspetto *quasi-combinatorio* che è essenziale alla teoria, e che emerge in particolare negli assiomi dell'insieme potenza e di scelta. Come è stato sottolineato da vari autori, in modo particolarmente chiaro da Bernays (1935), tale aspetto consiste nel ritenere possibile, in un senso che viene precisato dalla teoria stessa, estendere (con le necessarie modifiche) agli insiemi infiniti quei procedimenti combinatori che sono riconosciuti intuitivamente validi nel finito: ad esempio, per l'assioma dell'insieme potenza, il costituire l'insieme di *tutti* i sottoinsiemi di un insieme dato, indipendentemente dalla loro definibilità, e per l'assioma di scelta un insieme che selezioni un elemento da ciascuno degli insiemi non vuoti di una famiglia data, senza dare la regola secondo cui la scelta deve essere fatta; il punto dell'adozione di tali assiomi è proprio la negazione che tutto possa essere fatto mediante una regola, in qualsiasi senso si voglia intendere quest'ultima clausola; in altre parole, nella teoria degli insiemi vogliamo vedere che cosa succede precisamente quando ammettiamo oggetti tali che non abbiamo nessun modo per definirli o costruirli, in un senso qualsiasi. Naturalmente, non si può rimproverare a Cassirer, specialmente al Cassirer del 1907, di non aver chiaro questo aspetto della teoria degli insiemi; quello che però sembra sottostare alle sue considerazioni è un'ambiguità *filosofica* che, in realtà, pur emergendo nei riguardi di singoli assiomi della teoria degli insiemi, è di ordine più generale: la confusione tra singoli principi *teorici*, *interni*, della teoria aventi carattere quasi-combinatorio o comunque opposto all'aspetto di conformità ad una regola funzionale, e il principio *trascendentale* della preminenza dell'aspetto funzionale su quello sostanziale del concetto, che è uno dei cardini dell'intera filosofia critica di Cassirer (si veda Cassirer 1929, III-1,2) e su cui pure torneremo a breve. È dalla mancata distinzione di questi due piani che, a nostro parere, si generano in gran parte quelle difficoltà di confronto con la logica e con la filosofia della matematica contemporanee, che si incontrano non appena si prendono in considerazione i testi pertinenti di Cassirer.

Leggendo questo lavoro, ma anche quelli successivi di cui tratteremo più avanti, sembrerebbe che Cassirer abbia una propensione per un qualche orientamento di tipo costruttivista, ad esempio nel senso di un predicativismo come quello di Hermann Weyl, che parrebbe essergli congeniale; tuttavia, ad un esame più approfondito risulta piuttosto che su ogni altra considerazione prevale in lui quel fondamentale rispetto per la pratica matematica che è una delle costanti della sua filosofia e che gli impone di rifiutare ogni proposta, per quanto vicina alle sue idee, da cui consegua una qualche limitazione della matematica così come *di fatto* è praticata. In effetti, una filosofia della matematica di orientamento "trascendentale" non deve necessariamente proporre modifiche a livello teorico, intra-matematico: non ci sono ostacoli *di principio* ad una comprensione di tipo trascendentale anche delle più ardite speculazioni sull'infinito superiore (ad esempio, le ipotesi dei grandi cardinali), e le difficoltà che emergerebbero in una simile impresa (per quanto ne sappiamo, mai tentata) non sarebbero sullo specifico dell'articolazione teorica, quanto piuttosto di ordine generale. Per dare un esempio concreto, in un ambito diverso (e meno controverso e impegnativo), pensiamo allo schema di assiomi di induzione dell'aritmetica del primo ordine: quello che dovrebbe interessare, in una prospettiva trascendentale, non è tanto (o comunque non principalmente) lo studio delle forme "deboli" di esso in nome di istanze costruttivistiche, che in questo contesto resterebbero comunque indefinite, quanto piuttosto una determinazione accurata della natura di *sintesi* che esso presenta e delle condizioni di possibilità in senso trascendentale di quella stessa sintesi. Infatti, Cassirer stesso insiste, nello scritto che stiamo esaminando, sul problema dell'individuazione dei vari *livelli di sintesi*, nelle loro forme e nelle loro condizioni, come compito precipuo di uno studio fondazionale della matematica che possa dirsi ispirato alla filosofia critica, ritenendo coerentemente che questo sia l'aspetto per cui, malgrado tutti i suoi evidenti limiti teorici e soprattutto storici rispetto ai successivi sviluppi della matematica, l'impostazione problematica di Kant conserva un valore e può considerarsi ancora viva in quest'ambito. È in questo senso che, a proposito del ruolo della sintesi, a Cassirer preme citare la nota asserzione della *Kritik der reinen Vernunft* (B 130): «dove infatti l'intelletto nulla ha prima congiunto, nulla può neppure disgiungere» (Cassirer 1907, 37). Non entrando nella questione dell'accuratezza filologica dell'interpretazione di Kant da parte di Cassirer, ci limitiamo a notare che a lui interessa sottolineare qui che un giudizio, e quindi un rapporto obiettivamente valido, è propriamente possibile solo se non c'è una mera riunione di elementi nella rappresentazione, ma tali elementi sono invece messi in rapporto mediante un'unità sintetica necessaria: in questo senso, il giudizio sintetico non può essere considerato sullo stesso piano di quello analitico, e la sintesi precede sempre, in senso logico-trascendentale, l'analisi. Di ciò si dovrebbe tener conto anche nelle discussioni, spesso basate sul fraintendimento o l'oblio di questo punto, tra impostazioni in senso lato logiciste e neokantiane sulla questione dell'analiticità nei linguaggi delle teorie matematiche (in primo luogo, naturalmente, l'aritmetica, come più avanti vedremo meglio).

Una certa ambiguità della posizione di Cassirer, nel senso della mancata distinzione di piani di cui dicevamo, ritorna nella parte finale del saggio. In esplicita polemica con Poincaré, autore che pure su altre questioni cita altrove con approvazione, Cassirer scrive:

> L'esistenza logica e matematica [è] qualcosa di totalmente diverso dalla mera "assenza di contraddizione" [...]. Non basta che una definizione non si contraddica da sé, finché non siamo sicuri se essa non sia del tutto vuota (ibid., 41).

È vero che Cassirer presenta poi l'esempio della associatività dell'addizione, e quindi ha in mente l'irriducibilità ai princìpi di identità e contraddizione del procedimento per cui si riuniscono gli elementi di una molteplicità indipendentemente dal loro ordine; è vero quindi che quello che gli interessa è ancora il carattere sintetico della concettualizzazione matematica. Tuttavia, noi sappiamo che, ovunque c'è coerenza sintattica, là c'è una struttura che soddisfa gli assiomi: ciò è garantito (per le teorie del primo ordine) come è noto dal teorema di completezza di Gödel. Quindi: se le sue osservazioni ora citate si riferiscono alle *teorie* matematiche considerate come sistemi formali, Cassirer ha semplicemente torto; e tuttavia, se con le sue parole egli intende sottolineare che la coerenza sintattica è soltanto una condizione necessaria, ben lungi dall'essere anche sufficiente, della vera e propria concettualizzazione matematica, la sua posizione diventa ben diversa, ed è anzi largamente condivisa. Il problema, però, è analogo a quello che abbiamo notato sopra, a proposito della teoria degli insiemi: non è facile distinguere, nella lettera del testo cassireriano, quanto sia su un piano e quanto sull'altro, quanto sia espressione di una posizione genuinamente filosofica, che nasce da una sicura conoscenza (che Cassirer mostra continuamente) dello sviluppo della matematica del tardo '800 (di cui un esempio particolarmente significativo per lui è il Programma di Erlangen di Klein, sul quale scriverà pagine illuminanti in Cassirer 1940, I-1; si veda Biagioli 2016) e quanto invece sia espressione di un'imprudente presa di posizione che sarebbe poi stata smentita dai risultati metateorici della logica matematica. Ad aggravare la situazione, se fosse quest'ultimo il caso, si avrebbe il fatto che proprio negli anni 1899-1905, in varie occasioni, Hilbert (ordinario a Göttingen dal 1895) si era espresso a favore della concezione contro cui polemizza Cassirer, concezione che avrebbe successivamente almeno parzialmente abbandonato, ma che caratterizza il primo periodo delle sue ricerche fondazionali (si vedano gli scritti rilevanti raccolti in Hilbert 1935).

Senza entrare nella complessa questione dei rapporti tra Cassirer e Hilbert, ci limitiamo ad osservare che Hilbert non viene mai menzionato nell'articolo che stiamo considerando, e che bisogna attendere il terzo volume (Cassirer 1929) della *Philosophie der symbolischen Formen* (in particolare, il capitolo IV della terza parte, su cui torneremo) per trovare un serrato confronto di Cassirer con una fase delle ricerche hilbertiane, quella, ormai più matura, dei primi anni '20.

Quello che forse rimane il punto più interessante, dal nostro punto di vista, dell'intero articolo di Cassirer, è dove egli difende il ruolo che in matematica, qui in particolare in geometria, ha l'*intuizione*, pur accettando in pieno la limitazione che la "logistica" pone ad essa. L'intuizione, quanto più «come *strumento* autonomo *di dimostrazione* si fa indietro, tanto essa risulta indispensabile per indicare il *compito* che è posto in ultimo alle nostre sintesi logiche, e per determinare con questo la loro direzione» (Cassirer 1907, 46). Paragonata all'esperienza nel sistema fisico di Descartes, essa serve a «fare una scelta tra i diversi possibili princìpi che noi potremmo, con eguale diritto logico, porre all'inizio delle nostre deduzioni» (ibid.). Il pericolo che deve essere fronteggiato, e davanti al quale l'intuizione è indispensabile è la *non univocità* dei concetti (qui geometrici) fondamentali: Cassirer teme che il celebre detto (volutamente paradossale) di Russell sulla matematica, come scienza in cui non si sa di che cosa si parla e non si sa se le asserzioni che si fanno sono vere, diventi letteralmente vero; addirittura, secondo lui, i geometri hanno guardato come il Demiurgo di Platone ad un'Idea che desideravano esprimere. La conseguenza più grave della non univocità tanto paventata sarebbe che il legame tra matematica pura ed applicata sarebbe rescisso. Mettiamo da parte quest'ultima risposta, perché in un certo senso non è pertinente (quale problema comporta la mancanza di un unico modello, ad esempio, per la teoria dei numeri reali per l'applicabilità dell'analisi? Non è piuttosto una ricchezza?); in un altro senso, se presa sul serio, apre la questione assai intricata dei rapporti tra strutture astratte e mondo fisico, questione su cui torneremo tra poco, e che tuttavia non possiamo affrontare qui come meriterebbe, dato che ci porterebbe lontani dal testo di Cassirer di cui ci stiamo occupando. Ricordiamo invece che, come è noto a chiunque conosca la filosofia della matematica e gli studi fondazionali del secolo scorso, il fenomeno delle strutture *non standard*, ma più semplicemente e profondamente la stessa *formalizzazione* paiono mettere in questione radicalmente quell'esigenza di univocità che Cassirer (e non è certo isolato in questo, anche attualmente) considera di fondamentale importanza. Non è questo il luogo per soffermarci nuovamente su tale complesso problema, che abbiamo discusso sopra; quello che ci interessa è piuttosto sottolineare quanto difficilmente questo richiamo all'intuizione come garante dell'univocità dei concetti matematici possa inserirsi coerentemente in una prospettiva come quella che emerge dagli scritti più maturi di Cassirer (si vedano: Cassirer 1910, I-1,3; 1929, III-1-3; 1940, I-1-3), che ha tra le sue componenti decisive l'insistenza sugli aspetti *strutturali* della matematica, intesi oltretutto in senso *funzionale*, *sintetico*, all'opposto non solo di ogni empirismo, ma d'altra parte anche di ogni realismo platonista; soprattutto, *contro ogni primato dell'intuizione*, sia come intuizione sensibile, sia come intuizione intellettuale in senso platonizzante. Quando Cassirer ritorna su problemi di filosofia della matematica, ciò che prevale è sempre un modello della scienza matematica che non sapremmo definire in altro modo se non con la parola "algebrico". Eppure, ancora nell'ultimo volume dell'*Erkenntnisproblem* (1940, I-4), su cui torneremo a breve, Cassirer ribadisce che l'intuizione, che la "logistica" aveva tentato di eliminare, riprende pienamente i suoi diritti: richiamandosi a Poincaré e a Weyl, egli sottolinea che ciò avviene sia nei fondamenti della teoria degli insiemi, che non possono fare a meno del concetto intuitivo di iterazione, sia nei fondamenti dell'aritmetica, dove l'intuizione, come sintesi costruttiva, dà l'unica possibile giustificazione non circolare del principio di induzione matematica.

Questa difficoltà può risolversi, a nostro parere, solo riconoscendo che l'intuizione che Cassirer ha in mente non è né l'intuizione empirica, né l'intuizione intellettuale: è invece una *intuizione pura*, che secondo Cassirer rimane fondamentalmente kantiana (nello spirito, benché certamente non nella lettera), essendo egli pienamente convinto che solo ad una valutazione superficiale tale intuizione può sembrare messa in questione dagli sviluppi matematici successivi a Kant. Essa conserva invece tutto il suo valore, a patto che sia depurata da quelli che Cassirer, in modo tipicamente neokantiano (e con discutibile giustificazione storica), considera meri residui empiristici. In realtà, è chiaro che sotto il termine "intuizione" abbiamo qui il concetto stesso di *sintesi costruttiva*, che è il fondamento della concettualizzazione in generale, in quanto il concetto non è altro che una regola funzionale che costituisce sinteticamente un campo di oggetti. Infatti, anche se l'intuizione sembra cogliere il proprio contenuto come una realtà autosufficiente, concettualmente l'oggetto singolo emerge solo come termine di una sistematica molteplicità, che lo precede dal punto di vista logico (in senso lato); pertanto la determinazione dell'individualità degli elementi è *alla fine*, e non al principio, dello sviluppo concettuale, costituendo la *meta* a cui via via ci avviciniamo (ed in questo la matematica anticipa, e in parte giustifica, l'analogo procedimento della fisica). Questo è un punto fondamentale della teoria cassireriana del concetto, come è testimoniato sin dall'inizio sia in Cassirer (1910) che (1929), su cui torneremo, come pure nelle parti rilevanti (ricordiamo tra tutte quelle sulla filosofia critica nel secondo volume) dell'*Erkenntnisproblem*. Quindi si può leggere l'insistenza di Cassirer sull'intuizione e sull'univocità, distinguendo in essa due aspetti: da una parte, il richiamo all'intuizione come designatrice del *compito* delle sintesi logiche; dall'altra, i riferimenti ad una pretesa univocità, garantita ai demiurghi-geometri da presunte Idee platoniche, riferimenti insostenibili, oltre che decisamente pre-moderni (intendendo per moderna la matematica dalla metà dell'800 in poi). Scartato quest'ultimo aspetto, il primo elemento è pienamente coerente con quel modello *funzionale, strutturale, algebrico* della matematica, tipicamente cassireriano, cui sopra accennavamo. Del resto, che Cassirer sia pienamente consapevole della vera e propria *crisi* che l'intuizione in senso classico aveva subito in matematica a partire dalla metà dell'800, è testimoniato (ad esempio) proprio dalla stessa parte sopra citata del quarto volume dell'*Erkenntnisproblem* (Cassirer 1940, I-4), in cui sin dall'inizio egli rimanda addirittura al saggio di Hans Hahn (uno dei padri fondatori del *Wiener Kreis*) *Die Krise der Anschauung* (Hahn 1933). Tra parentesi, ciò fornisce una delle molte testimonianze che si potrebbero portare del fatto che Cassirer era costantemente aggiornato, almeno fino ai primi anni trenta, di quasi tutto quello che succedeva sulla scena filosofica di lingua tedesca.

È però forse soltanto nelle ultime pagine del saggio che stiamo considerando (Cassirer 1907, 48-49) che troviamo la chiave interpretativa di questa insistenza sul ruolo ineliminabile dell'intuizione. A prima vista, in queste pagine, non solo non sembra emergere alcuna indicazione in questo senso, ma Cassirer asserisce qualcosa che può addirittura preoccupare (o quantomeno stupire) chiunque abbia anche un'idea vaga della possibile rilevanza di una prospettiva kantiana o neokantiana per la filosofia della matematica. Infatti, asserire che la critica della conoscenza ha come vero e proprio problema non tanto «il contenuto dei principi matematici, quanto il ruolo che nella costruzione del nostro concetto di una realtà "effettuale" essi giocano» (ibid., 48), e (pur con espliciti intenti di paradossalità) che lo sguardo della filosofia non deve rivolgersi né alla matematica né alla fisica, ma «esclusivamente alla connessione tra i due ambiti» (ibid., 48), sembra una svalutazione della riflessione filosofica sulla matematica (e anche sulla fisica) che limita enormemente il suo orizzonte e la sua portata; e questo, da parte di un autore che non solo si mostra interessato in quasi tutto l'arco della sua riflessione alle scienze matematiche in quanto tali, ma è tanto consapevole del legame vitale della filosofia critica con tali scienze al punto da iniziare proprio il saggio del 1907 dicendo che «il destino e l'avvenire della filosofia critica dipendono dal suo rapporto con la scienza esatta» (ibid., 1). Ma ciò che qui conduce Cassirer ad una posizione che egli stesso riconosce in qualche misura come paradossale è l'attenzione primariamente rivolta alla novità dell'impostazione critica kantiana, difesa contro le interpretazioni dei logicisti, che egli considera limitative: quello che interessa, qui, non è tanto negare la rilevanza di una riflessione filosofica sulla matematica pura, quanto di sottolineare come uno dei problemi originari della filosofia trascendentale kantiana fosse la costituzione matematica della realtà fisica, e come tale problema conservi un interesse centrale per la filosofia critica. In questo contesto, i richiami all'importanza dell'intuizione, come sintesi costruttiva, sono pienamente comprensibili: l'intuizione, anche ammesso che per il problema strettamente *logico* dei fondamenti fosse irrilevante, è invece fondamentale per il problema *epistemologico* posto dalla scienza esatta, ed è quest'ultimo che a Cassirer interessa più di ogni altro (su questo punto si vedano ancora Mormann 2008 e Biagioli 2020). Per questo egli accusa il logicismo di lasciarsi sfuggire completamente la questione del ruolo cruciale della matematica nella *costituzione dell'oggettività* in generale, ruolo che si esplica nel carattere essenzialmente matematico della scienza della natura. Nella costituzione dell'oggettività l'intuizione ha una funzione fondamentale, che si esercita inscindibilmente a livello di matematica pura e applicata, in quanto, in generale, *ogni significato* non può essere colto se non in riferimento all'intuizione (e viceversa), in quel nesso inestricabile di immanenza-trascendenza che caratterizza il *simbolo* come manifestazione in forma intuitiva di un contenuto sopra-intuitivo (si veda Cassirer 1929, III-4, su cui pure torneremo). D'altra parte, il problema dell'uso delle scienze matematiche nella conoscenza del mondo fisico rimane uno dei grandi problemi di qualunque filosofia della matematica, e si potrebbe argomentare che nessuna delle posizioni classiche nella filosofia della matematica del primo '900 (logicismo, formalismo, intuizionismo) dà ad esso, di per sé, una soluzione: in questo senso, che il problema delle applicazioni sia centrale nel saggio di Cassirer, e che questo sia uno dei motivi principali del suo interesse per il lettore contemporaneo, fu giustamente sottolineato a suo tempo da Ettore Casari (introducendo una traduzione italiana del saggio). Anche per alcuni successivi tentativi platonisti, più o meno "naturalizzati", su cui torneremo in seguito, la questione delle applicazioni resta aperta, a meno che non si accetti qualcosa di simile ai cosiddetti "argomenti di indispensabilità", quegli argomenti che, a partire dal riconoscimento del ruolo indispensabile della matematica nella migliore spiegazione dei fenomeni che abbiamo, concludono che gli impegni ontologici della matematica devono essere presi alla lettera, e che essa è confermata (o refutata) inseparabilmente dalla fisica; tali argomenti però comportano che la soluzione al problema delle applicazioni della matematica sia pagata al prezzo di far dipendere da scoperte della fisica la sensatezza stessa di alcuni enunciati matematici (si veda, ad es., Maddy 1997 per una discussione).

2. Il *Funktionsbegriff*

Questioni di filosofia della matematica sono centrali nella prima parte del classico *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910), il primo grande lavoro teoretico di Cassirer davvero originale (anche rispetto ai suoi predecessori della scuola di Marburgo, Cohen e Natorp), dove viene ampiamente delineata una concezione che mette al centro il carattere *funzionale* (in quanto opposto a sostanziale) di ogni forma di conoscenza (per una ricognizione e valutazione complessiva di questo lavoro rimandiamo a Heis 2014). Nelle analisi molto articolate e profonde che troviamo nei primi tre capitoli della prima parte dell'opera, Cassirer delinea un'ontologia degli oggetti della matematica fondamentalmente basata su *sistemi di relazioni*. Ci soffermeremo ora sulla teoria della formazione dei concetti (Cassirer 1910, prima parte, cap. I; si vedano ancora Mormann 2008 e Biagioli 2020); riprenderemo brevemente in seguito, considerando l'ultimo contributo di Cassirer alla filosofia della matematica, sia la filosofia dell'aritmetica che le critiche all'impostazione logicista (cap. II; si veda anche Heis 2010), mentre non tratteremo qui la filosofia della geometria (cap. III, su cui rimandiamo a Biagioli 2016). Già nella prefazione all'intera opera troviamo queste parole rivelatrici:

> Il primo impulso verso le ricerche contenute in questo volume è nato in me dagli studi di filosofia della matematica. Mentre cercavo, partendo dalla logica, di arrivare ai concetti fondamentali della matematica, mi si rivelò la necessità di analizzare anzitutto con maggior rigore e di ricondurre ai suoi presupposti *la stessa funzione concettuale*. Qui però si fece subito gravemente sentire una particolare difficoltà: la tradizionale teoria logica del concetto, nei suoi noti tratti essenziali, si dimostrava inadeguata anche soltanto a *formulare* in modo completo i problemi a cui conduce la teoria dei principi della matematica. Come mi risultò con sempre maggior chiarezza, a questo punto la scienza esatta era pervenuta a certe questioni per le quali il linguaggio formale della logica tradizionale non possiede alcun correlato esatto. L'effettivo contenuto delle conoscenze matematiche rinviava a una forma fondamentale di concetto che nella logica stessa non era stata ancora chiaramente definita e riconosciuta (Cassirer 1910, 3).

Nel primo capitolo, che ha per oggetto la teoria della formazione dei concetti, Cassirer ha di mira in primo luogo diverse teorie classiche dell'astrazione, contro cui solleva obiezioni di diversa natura, logiche ed epistemologiche, difficilmente aggirabili. Non è questo il nostro problema, adesso, ma proprio considerando queste obiezioni è possibile evidenziare, di fatto, la nuova nozione di *concetto* che l'autore propone, della massima rilevanza proprio per la questione dell'oggettività matematica. Tale nuova concezione risulta da una radicale critica dell'astrazione, ma ha effetti anche sul modo in cui deve essere intesa la stessa fondamentale relazione logica di *sussunzione* di oggetti sotto concetti: essa mette infatti in secondo piano (pur senza negarli, ovviamente) sia tale relazione logica, sia l'ordinamento gerarchico dei concetti (e delle loro estensioni) tra loro secondo rapporti di genere e specie, in favore di nessi logici di diversa struttura, che non è semplice descrivere, e che ora cercheremo brevemente di delineare alla luce del testo cassireriano.

Cassirer traccia innanzitutto una netta distinzione tra concetti matematici e concetti empirici: i primi nascono mediante quella che lui chiama una *definizione genetica* (ibid., 21), e non hanno lo scopo di riprodurre, al contrario della maggior parte dei secondi, aspetti di oggetti esistenti nella realtà; per cui, se nel caso del concetto empirico si tratta solo di raccogliere, quasi in un'abbreviazione, una molteplicità data e sussistente, nel caso del concetto matematico

> si tratta di *creare* la molteplicità che forma l'oggetto della considerazione, in quanto *da un semplice atto del porre viene prodotta per sintesi progressiva una connessione sistematica di creazioni del pensiero*. Qui pertanto alla semplice "astrazione" si contrappone un atto speciale del pensiero, una *libera produzione di determinati nessi di relazioni* (ibid., 21; corsivi nostri).

Se guardiamo alle classiche teorie dell'astrazione, notiamo che si è sempre cercato di togliere questa opposizione, che costituisce un serio problema per la loro validità universale, ma questo tentativo non può riuscire, e anzi costringe a limitare drasticamente l'ambito di applicabilità del procedimento di astrazione, oppure a snaturarne il carattere puramente logico (in senso empiristico o psicologistico). In secondo luogo, Cassirer afferma la natura *seriale* della formazione di concetti (non solo, si noti, nelle scienze esatte):

> Ogni formazione di concetti è legata a una determinata *forma di costruzione di serie*. Diciamo *concettualmente* compresa e ordinata una molteplicità offerta dall'intuizione allorché i suoi termini non stanno l'uno accanto all'altro senza rapporti, ma derivano in successione necessaria da un determinato termine iniziale secondo una fondamentale rela-

zione generatrice. L'*identità* di questa relazione generatrice, che viene mantenuta pur nel mutare dei singoli contenuti, è ciò che costituisce la forma specifica del concetto (ibid., 25).

Non è indispensabile, anzi è del tutto secondario (e solo di pertinenza della psicologia) che si abbia, alla fine del processo, un singolo oggetto astratto (o una singola rappresentazione universale) come risultato del fatto che la relazione rimane la stessa (nello specifico caso che si considera); può anche darsi che ciò non avvenga (con certe relazioni, anzi, accade proprio questo), senza per questo interrompere la "deduzione" seriale degli elementi che si trovano in relazione tra loro. Infine, affinché si compia questa connessione seriale, deve darsi una *legge universale di coordinazione*, che pone ed esprime la specifica regola di successione. Gli elementi della successione che si trovano in relazione sono tenuti insieme dalla *regola di progressione* che si mantiene la stessa, indipendente dai termini e senza presupporli ontologicamente nella loro individualità data (cfr. ibid., 26):

> Non la "universalità" di una rappresentazione, bensì l'universale validità di un *principio di ordinamento in serie* forma l'elemento caratteristico del concetto. Dalla molteplicità che ci si offre non isoliamo alcune parti astratte, ma creiamo per i suoi termini una *relazione* univoca, pensandola [la molteplicità] collegata mediante una legge perentoria. E quanto più avanziamo in questo senso, quanto più si rinsalda questa connessione secondo leggi, tanto più chiara si manifesta anche la determinatezza univoca del particolare medesimo (ibid., 31).

Non possiamo ridurre la *forma* della successione degli elementi della molteplicità considerata, naturalmente, a una qualche dimensione "cosale" tale da ridurla sullo stesso piano (o, dal punto di vista logico, allo stesso tipo, in senso non tecnico) degli elementi stessi (neanch'essi comunque caratterizzabili come cose date o esistenti in senso quasi empirico): come Cassirer afferma decisamente, «il suo "essere" consiste esclusivamente nella determinatezza logica in virtù della quale si distingue in maniera univoca da altre possibili forme seriali» (ibid., 39), determinatezza che si esprime in un *atto sintetico di definizione* irriducibile a una semplice intuizione.

3. Sui simboli matematici

Ulteriori contributi originali a temi di filosofia della matematica si trovano nella *Phänomenologie der Erkenntnis* (Cassirer 1929, terza parte, cap. IV), il terzo volume della *Philosophie der symbolischen Formen*, un'opera per decenni sostanzialmente ignorata nella letteratura di filosofia della matematica di ambiente analitico, benché contenga profonde discussioni che mostrano una puntuale conoscenza del dibattito degli anni '20 tra la scuola di Hilbert e l'intuizionismo con gli originali contributi di Weyl. Qui troviamo (tra altri temi, sui quali qui non ci soffermeremo) un tentativo di rispondere alla cruciale questione: che cos'è un *simbolo* matematico? Cassirer, com'è nel suo stile, non risponde esplicitamente alla domanda, ma apre una possibile via di risposta, via che difficilmente porterà ad una "definizione" (filosofica), ma che certamente contribuisce a creare un "paesaggio teorico" in cui la questione diventa un po' meno intrattabile. Secondo Cassirer, il significato dei simboli matematici

> non consiste in ciò che essi "sono", né in qualcosa che essi "riproducono", ma in una direzione specifica della stessa attività di formazione ideale [*des ideellen Bildens*]; non in un oggetto esterno a cui mirano, ma in un modo determinato di oggettivazione [*Objektivierung*]. Il mondo delle forme matematiche è un mondo di forme di ordine, non un mondo di forme di cose. La sua "verità" non può quindi essere determinata togliendo ai segni in cui si presenta il loro valore di significato, lasciandoli in qualche modo solo con il loro contenuto fisico-oggettivo, né mostrando alcuni singoli oggetti esistenti ai quali questi segni corrispondono direttamente. Il valore specifico della matematica può essere riconosciuto, il suo *quid iuris* può essere dimostrato, solo nella misura in cui le si assegna il suo posto nel complesso del processo di oggettivazione [*Objektivationsprozess*] della conoscenza. È un momento necessario di questo processo, non una parte e una riproduzione di una realtà trascendente, sia essa fisica o metafisica (Cassirer 1929, 447).

Questo passo, della massima importanza, merita di essere oggetto di attenta riflessione, in quanto indica una direzione di pensiero completamente diversa rispetto alle consuete concezioni realiste e formaliste del ruolo dei simboli in matematica, una direzione che sembra poter essere di aiuto per poter chiarificare quel ruolo. Tra i problemi che a sua volta solleva, i più importanti (e difficili) sono i seguenti: che cos'è "una direzione specifica dell'attività di formazione ideale"? Che cos'è, in generale, un "modo determinato di oggettivazione"? Che cos'è, qui, "il processo di oggettivazione della conoscenza"? Considerato il contesto dell'opera cassireriana, sembra che tutte queste nozioni debbano essere intese in un senso fortemente *oggettivo*. Questo senso non ha nulla a che fare con qualsiasi attività formativa soggettiva, o con qualsiasi modo in cui un soggetto possa rendere qualcosa oggettivo, o, in generale, con qualsiasi processo soggettivo: qui la questione non è il ruolo dei simboli nella "deduzione soggettiva" (in termini tecnici kantiani), ma il loro significato e la loro funzione teorica, sebbene la soluzione proposta a quest'ultimo problema abbia profonde conseguenze sul primo. Il significato oggettivo delle nozioni di cui sopra è la loro funzione trascendentale nell'*oggettivazione* della conoscenza. In matematica questo processo autonomo può essere osservato nella sua forma più pura: qui, un mondo concettuale autosufficiente di significati nasce secondo una legge di costituzione e di sviluppo immanente e intrinseca: questo è il "processo", del tutto oggettivo, attraverso il quale la matematica "si oggettiva". Proprio questo processo è, secondo Cassirer, la chiave per comprendere il ruolo, altrimenti misterioso, della matematica nella conoscenza. Il posto della matematica nel progressivo dispiegarsi dei livelli di oggettività, dalle strutture astratte più universali fino ai fenomeni fisici più concreti, è allo stesso tempo il più importante *explicandum* di ogni filosofia della matematica che voglia essere rilevante per l'epistemologia, e la via teorica di accesso alla comprensione della vera natura del "mondo" matematico. Ciò non significa che l'unico modo per comprendere filosoficamente la matematica sia considerare il suo ruolo nelle scienze fisiche; al contrario, la vera autonomia della matematica emerge solo quando si riconosce l'assenza di una specifica ontologia matematica fatta di peculiari "sostanze". Ci si rende conto invece che il mondo matematico, «un mondo di forme di ordine, non un mondo di forme di cose» (ibid.), è una tappa (anche se la più cruciale) nel processo di "concrezione" dell'oggettività in generale. Questo processo comincia ed ha la propria *ratio essendi* in un terreno assolutamente primitivo di forme pure di relazione, che assumono per la prima volta proprio nelle teorie e strutture matematiche la loro sussistenza oggettiva e la loro intelligibilità. In matematica queste forme pure si mantengono in un puro regno di *validità*, senza assumere la realtà di una *sostanza*.

L'altro aspetto, non meno importante, della questione dell'essenza dei simboli matematici è la necessità di chiarificare il loro ruolo come condizione necessaria e sufficiente per la possibilità stessa del *nostro* pensiero:

> Noi non possiamo cogliere il "significato" senza riferirlo all'"intuizione", così come l'elemento intuitivo non ci può mai essere "dato" se non in "riguardo" [*Hinblick*] al significato [...]. L'elemento simbolico è allo stesso tempo immanenza e trascendenza: in esso infatti un contenuto essenzialmente sovra-intuitivo si manifesta in forma intuitiva (ibid., 449).

Cassirer qui si riferisce specificamente alle nostre capacità ed esigenze: non siamo più sul piano "oggettivo", ma su quello "soggettivo"; altrimenti, l'idea che il significato non possa essere colto senza riferirlo all'intuizione risulterebbe problematica. Questa idea è comunque non banale, e molti filosofi, ad esempio di orientamento ispirato a Frege, o di tipo platonista, difficilmente la accetterebbero; la ritroviamo, in forma diversa, nella tradizione fenomenologica husserliana. Cassirer la propone e dà nel suo lavoro alcune ragioni per accettarla, almeno per il significato dei linguaggi della matematica, intendendo la nozione di intuizione in un senso che non ha nulla a che fare con la percezione immediata, e invece ha molto a che fare con il *potere di sintesi* delle formule. Si ha qui un'idea della profondità dei problemi implicati nella nozione di simbolo: infatti, il manifestarsi di un contenuto sovra-intuitivo nell'elemento intuitivo appare come una sorta di *Urphänomen*, talmente fondamentale (basti pensare alla sua rilevanza per il problema del significato in generale) da dover essere assunto come tale e rimanere refrattario a qualsiasi tentativo di vera e propria spiegazione (se con questo si intende la riconduzione a qualcosa di più primitivo), che infatti nel lavoro di Cassirer non troviamo.

4. Matematica libera

Infine, prendiamo in considerazione una parte di quello che è forse l'ultimo contributo, in ordine di tempo, di Cassirer a una ricognizione storica dello sviluppo del problema della conoscenza specificamente per quanto riguarda le discipline matematiche, quello che troviamo nel quarto volume dell'*Erkenntnisproblem* (Cassirer 1940, pubblicato soltanto postumo in inglese nel 1950, ma scritto dieci anni prima; la traduzione italiana, del 1961, fu condotta sull'originale dattiloscritto tedesco). La parte che qui ci interessa è la quarta del libro primo (sulla scienza esatta), che ha ad oggetto il concetto di numero e la sua fondazione (*Begründung*) logica. Si tratta, come sempre nel caso di questo autore, di un contributo da una parte estremamente ricco di riferimenti, contenuti e spunti non banali e molto originali rispetto alla letteratura (specialmente in lingua inglese) sul tema, sia coeva che successiva, dall'altra, tale da scoraggiare una formulazione precisa e sistematica, nello stile analitico, di poche tesi ben definite e sistematicamente argomentate. Scegliamo un singolo tema, quello del ruolo della nozione di *sintesi*, in rapporto a quelle di intuizione, costruzione ed esistenza, nella fondazione del concetto di numero. Vediamo alcuni aspetti del ruolo che la nozione di sintesi gioca nel tentativo articolato e argomentato da parte di Cassirer di caratterizzare l'oggettività matematica (in quanto distinta da ogni altra forma di oggettività) in modo tale da rendere conto, contemporaneamente, di due suoi aspetti a prima vista difficilmente conciliabili: da una parte, la inalienabile libertà e autonomia della creazione matematica, nelle sue concrezioni o cristallizzazioni (per così dire) essenzialmente e necessariamente *simboliche* e nella sua correlativa natura (in breve) di formazione di un complesso di sistemi auto-formantisi e auto-sviluppantisi, secondo proprie leggi interne, di *relazioni*; dall'altra, il fatto che l'oggettività propria della matematica si esprime nella capacità della matematica pura di costituire, in modo niente affatto arbitrario, autentica *conoscenza*, via via più articolata e profonda. Dobbiamo definire meglio la questione dell'oggettività matematica, evidenziando la tensione sopraindicata, e il ruolo cruciale della nozione di sintesi rispetto ad essa, in particolare nella costruzione degli oggetti matematici, in esplicita opposizione – fedelmente al dettato kantiano originario – a un presunto ruolo della logica formale nella spiegazione della possibilità stessa di giudizi sintetici. Vedremo poi quali conseguenze di critica delle posizioni in senso lato logiciste e di proposta di un originale punto di vista costruttivo (ma solo parzialmente e discutibilmente assimilabile a quelli delle varie scuole costruttiviste) l'autore tragga dalla sua caratterizzazione del ruolo della sintesi in matematica, in modo tale da svincolare lo sviluppo logico nella formazione delle teorie matematiche da rapporti di pura sussunzione di oggetti sotto concetti o di subordinazione tra concetti, in favore di altri peculiari procedimenti (non facili da delimitare in generale, ma comunque esemplificabili) di costruzione, definizione e deduzione.

Secondo la tradizionale concezione della funzione rappresentativa della conoscenza si tratterebbe, anche in matematica, di ammettere una sorta di corrispondenza tra concetto e realtà oggettiva, come garanzia della verità e oggettività di ciò che chiamiamo conoscenza matematica. Da questa apparentemente ovvia necessità, consegue immediatamente la problematicità di un aspetto innegabile della stessa matematica, che la differenzia da ogni altra forma di conoscenza scientifica, vale a dire la sua *libertà*: sembra che non si possa parlare di libere creazioni del pensiero, neanche in matematica pura, se non mettendo in pericolo il suo status di scienza che ha un proprio contenuto di verità. Pertanto, benché si riconosca che le fonti della conoscenza matematica sono ben diverse da quelle (almeno in parte) empiriche delle altre scienze, si ritiene che anche per essa debba valere un qualche criterio di adeguazione:

> La matematica non si muove in questa cerchia dell'esistenza sensibile; ma la sua verità è pure ancorata ad un *essere* originario, all'*essenza* delle cose. Quest'essenza è accessibile solo concettualmente; però il pensiero non la crea, ma la scopre (Cassirer 1940, 104).

Cassirer propone una via contraria: l'oggetto non viene visto come dato, ma come un punto di arrivo, a cui la conoscenza tende. Il riferimento è, naturalmente, al *Funktionsbegriff* (1910), dove come abbiamo visto viene delineata una concezione in cui ha un ruolo centrale il carattere funzionale della conoscenza. Si pone comunque il problema del significato dell'*esistenza* matematica in generale. Come già nel *Funktionsbegriff* (parte prima, cap. II) Cassirer opera ora una divisione schematica (e certamente discutibile – ma proviamo a vedere dove conduce la sua ricostruzione), in particolare per quanto riguarda la fondazione del concetto di numero: a suo parere Cantor, Frege e Russell cercherebbero la corrispondenza tra un certo concetto matematico e una realtà esistente; i matematici che prendono come punto di partenza la concezione ordinale del numero, come Dedekind, sarebbero orientati invece in senso funzionalistico. Questo senso, in prima approssimazione, è così caratterizzato:

> Si tratta piuttosto di prendere in considerazione il *procedimento* generale, che dà origine a ciò che noi denominiamo con l'espressione di "numero"; procedimento che conferisce a tale espressione tutto il suo significato (Cassirer 1940, 105).

Articolando questa concezione, Cassirer arriva a concludere, con un richiamo a Leibniz, che la scienza dei numeri diventa una parte, anzi piuttosto il momento originario e fondamentale, di una *teoria generale delle forme*.

Sorge però una grave obiezione, di natura invero più ontologica che epistemologica: adottando questa concezione, non siamo forse in balia dell'arbitrio? La risposta di Cassirer, sorprendente e a prima vista non del tutto pertinente (pur con il suo riconoscibile sapore strutturalista) per chi provenga dalla filosofia della matematica di ambiente analitico, è che l'*esistenza* di quei peculiari oggetti che chiamiamo numeri si esprime interamente e unicamente nelle loro *relazioni* reciproche, come è rivelato (storicamente e teoreticamente) dal fatto che non si incontra nessuna difficoltà di principio, né d'altra parte si dà alcuna arbitrarietà, nel processo tutto *interno* alla matematica, senza intromissioni ontologiche estranee, delle estensioni successive dei sistemi numerici (dai naturali fino ai complessi, esempio classico su cui Cassirer si sofferma):

> Il compito consiste piuttosto unicamente nel procedere da un sistema di relazioni relativamente semplici a sistemi di relazioni più complicati, e nell'introdurre, anche per questi, le espressioni simboliche corrispondenti. Tale compito non deriva dall'arbitrio soggettivo; esso si sviluppa piuttosto dai problemi oggettivi del pensiero matematico stesso (ibid., 113).

Cassirer riprende qui il punto di vista che emerge dalle analisi (ben più articolate) che aveva proposto, come abbiamo visto, prima nel *Funktionsbegriff*, in particolare per quanto riguarda un'ontologia degli oggetti della matematica (e non solo) basata su sistemi di relazioni, e poi nella *Phänomenologie der Erkenntnis* (1929) per quanto riguarda il ruolo cruciale delle creazioni simboliche:

> A mano a mano che si sale a gradini più elevati, si sviluppa questo processo fondamentale; con la creazione di nuovi simboli, si ha la possibilità di aver uno sguardo d'insieme su formazioni sempre più complicate e di renderle suscettibili di una determinazione (ibid., 117).

Il punto cruciale è questo: sembra inspiegabile che il pensiero matematico, pur rimanendo sempre rinchiuso nel proprio ambito, possa giungere a conoscenze oggettive sempre nuove. Questo problema, che ha chiaramente una posizione centrale nell'epistemologia della matematica, è eloquentemente formulato da Cassirer con queste parole:

> Bisogna però riconoscere che, a questo riguardo, ci troviamo di fronte ad uno dei problemi più difficili della teoria della conoscenza matematica. Giacché la possibilità che il pensiero rimanga completamente confinato nella sua propria cerchia e che tuttavia acquisti continuamente conoscenze nuove, rigorosamente *oggettive*, sembra una cosa quanto mai inspiegabile. Anche la matematica moderna ha cercato, per vie diverse, di risolvere questo problema. Tutti i punti di vista sono rappresentati in questi tentativi: da un *realismo ingenuo* che tratta ciò che è contenuto nel pensiero matematico come cose esistenti, fino ad un estremo nominalismo, che vede in questi oggetti solo dei "segni sulla carta" (ibid., 120).

Cassirer ricorda la ben nota distinzione cantoriana tra realtà immanente (o intra-soggettiva) e transiente (o trans-soggettiva) degli enti matematici. Sembra che la realtà immanente sia sufficiente per il matematico, tanto che lo stesso Cantor preferisce parlare di matematica *libera*, piuttosto che di matematica pura; egli stesso si pone inoltre il problema metafisico, apparentemente insolubile, della relazione tra queste due forme di realtà. Eppure, come Cassirer riconosce, di per sé la matematica può andare avanti per la propria strada trascurando questo problema, tenendo conto nel suo sviluppo solo della realtà immanente dei suoi oggetti, senza nessuna necessità di considerarli sotto l'aspetto della loro realtà transiente. Si pone però in modo ineludibile il problema di spiegare questa libertà concettuale della matematica, senza che essa decada ad arbitrio: c'è qui un compito epistemologico a cui non si può sfuggire, che consiste nel concepire

> questa libertà concettuale incontestabile, appartenente ai diritti fondamentali, direi quasi inalienabili, della matematica, in modo che non possa essere scambiata con un'espressione di arbitrio soggettivo (ibid., 122).

Cassirer osserva che non basta la pura non-contraddittorietà, ed è invece necessario un criterio ulteriore: un criterio che si accompagna a forme di deduzione irriducibili alla sola legge di non contraddizione, un criterio che entra in gioco, in particolare, nelle dimostrazioni matematiche di esistenza. L'individuazione di questo ulteriore criterio di esistenza in matematica (ulteriore rispetto alla mera non-contraddittorietà), da cui dovrebbe in ultima analisi risultare la soluzione del problema dell'oggettività matematica come risultato di una libera ma non per questo arbitraria creazione, si può trovare, secondo il nostro autore, solo riconsiderando attentamente il ruolo della sintesi nella filosofia della matematica di Kant.

Cassirer ricorda che in Kant la distinzione tra analisi e sintesi non è, in primo luogo, né psicologica, né logico-formale: che Kant ritenga che tale distinzione sia estranea tanto alla psicologia quanto alla logica generale è testimoniato dal fatto che egli arriva a negare esplicitamente che la spiegazione della possibilità dei giudizi *sintetici* sia compito della logica generale: essa «neppure ha bisogno di conoscere il *nome* di tali giudizi» (Kant 1787, B193). Per quanto riguarda in particolare la matematica, Cassirer sostiene in modo convincente che in Kant la sintesi entra in gioco prima di tutto come costruzione di *oggetti*: negando che sia di pertinenza della logica generale (noi diremmo "formale") spiegare come siano possibili giudizi sintetici,

> Kant vuol fare intendere che il vero carattere di ciò che chiama sintesi matematica si manifesta, non tanto nella formazione dei concetti e dei

> giudizi, quanto nella costruzione del *mondo degli oggetti* matematici. La formazione degli oggetti della matematica è "costruttiva" e perciò "sintetica", perché esige, non solo che noi scomponiamo un concetto dato nelle parti che lo caratterizzano, ma che, partendo da determinate relazioni fondamentali, ci eleviamo progressivamente a relazioni sempre più complesse, facendo corrispondere ad ogni nuovo insieme di relazioni un nuovo campo di *oggetti* (ibid., 123).

Abbiamo visto sopra delinearsi questo processo: procedendo da sistemi semplici di relazioni a sistemi di relazioni più complessi, e introducendo per questi le necessarie espressioni simboliche, vanno via via determinandosi, anche precisamente sotto l'aspetto di nuovi oggetti matematici, formazioni sempre nuove. Ma se la nozione di sintesi è correttamente interpretata in questo senso, ne risulta che la sintesi non è e non può essere *eliminata* dalla matematica, come invece vorrebbero i logicisti; Cassirer ripete quanto aveva sostenuto già (vedi sopra) nel suo articolo su Kant e la matematica moderna (Cassirer 1907, su cui si veda ancora Heis 2010): ben difficilmente si può accettare l'asserzione, ripetuta dai sostenitori della moderna "logistica" (Cassirer di nuovo ricorda in particolare Couturat), per cui sarebbe stata provata finalmente la natura puramente analitica dei giudizi matematici, in particolare aritmetici, e la sintesi sarebbe stata definitivamente espunta (per così dire) almeno dall'aritmetica. Come è noto, ci sono stati sin dal principio molti equivoci e molta confusione terminologica, nelle polemiche anti-kantiane del logicismo, nell'uso delle parole "analitico" e "sintetico", e non è questo il luogo per tentare una chiarificazione di questo problema spinoso, che richiederebbe un'ampia discussione (anche solo ci si volesse limitare a Frege). Quello che interessa a Cassirer è soprattutto sottolineare che solo in una accezione estremamente ristretta e discutibile di "sintetico", che i logicisti attribuiscono a Kant con scarsa fedeltà alle evidenze testuali, e d'altra parte solo mediante una loro accezione sufficientemente (e giustamente) ampia di "analitico", si può sostenere che gli sviluppi della matematica post-kantiani abbiano semplicemente refutato la posizione kantiana per cui i giudizi matematici sarebbero appunto sintetici (in un senso certamente da precisare alla luce di tali sviluppi), mostrandone al contrario l'analiticità, almeno in aritmetica. Tra gli autori che, in opposizione al logicismo, sostengono (sia pur in modi diversi) questa tesi fondamentale della ineliminabilità della sintesi dalla matematica, Cassirer cita Hölder (1924) e Weyl (1918). Il primo ritiene che ogni pensiero matematico abbia origine da concetti *selbstgebildet*, espressione pregnante, di non facile traduzione, che si potrebbe forse rendere in prima approssimazione con "auto-formati", e che la deduzione matematica sia governata in primo luogo dai modi del loro uso:

> Le conclusioni matematiche non possono perciò essere ricondotte al procedimento logico della sussunzione. Esse non si basano sull'ordinamento degli individui in specie o sulla subordinazione dei concetti di specie fra loro, ma su un *concatenamento di relazioni* [*Verkettung von Relationen*]; in quest'ultimo dobbiamo vedere un principio logico originale ed indipendente, che non è riconducibile in nessun modo alle pure leggi dell'identità e della contraddizione (ibid., 126; cfr. Hölder 1924, Introduzione, par. 6).

D'altra parta, come è noto, Weyl riteneva basilare per tutta la matematica e non ulteriormente riducibile la nozione intuitiva di *iterazione*, su cui si basa la nozione di numero naturale. Tale nozione primitiva si esprime nel principio di induzione matematica (che deve essere in qualche forma assunto e non può essere fondato su principi più basilari di natura puramente logico-formale) e nelle definizioni induttive (di insiemi) e ricorsive (di funzioni). Ma se tale nozione ha appunto carattere irriducibilmente intuitivo, si comprende perché Cassirer possa sostenere che l'*intuizione*, di cui la "logistica" credeva di essersi sbarazzata una volta per tutte, riprende (almeno in una certa sua forma, non riconducibile letteralmente al senso originario kantiano) i suoi diritti, perfino nel campo dell'aritmetica. Se si ammette il punto di vista fondamentale sopra attribuito a Kant, ulteriormente e coerentemente sviluppato in senso anti-psicologistico, secondo Cassirer, da William Rowan Hamilton, con la sua celebre concezione dell'algebra come *science of pure time or order in progression*, si può fondare rigorosamente non solo l'aritmetica, ma anche l'algebra generale, ma il carattere razionale così affermato e fondato di queste discipline non ne comporta affatto l'assorbimento nella logica, dato che la loro specifica struttura non ne viene compromessa, così come d'altra parte l'Analisi non è certo ridotta, come si suol dire, a una sorta di unica gigantesca tautologia. Cassirer richiama a sostegno di questa sua posizione antilogicista anche alcune note osservazioni di Poincaré (1902) sull'induzione matematica. L'uso necessario del principio di induzione matematica nelle dimostrazioni di alcune proprietà fondamentali dell'addizione e della moltiplicazione in aritmetica richiede di chiarire da dove derivi la liceità dell'uso di questo principio: il procedimento che esso autorizza non può avere origine empirica, ma neppure può essere inferito deduttivamente dalle leggi fondamentali della logica. Nelle parole dello stesso Poincaré:

> Questa regola, inaccessibile tanto all'esperienza, quanto alla dimostrazione analitica, è il vero tipo del giudizio sintetico *a priori*. D'altra parte, non si può pensare di vedervi una convenzione, come nel caso di alcuni dei postulati della geometria. Perché questo giudizio si impone con un'evidenza irresistibile? Per il fatto che ciò che esso asserisce non riguarda la natura delle cose, ma una facoltà fondamentale del nostro spirito. Questo ritrova in sé la facoltà di poter ripetere indefinitamente un certo atto, se è convinto una volta della possibilità dello stesso. Di ciò lo spirito possiede un'intuizione immediata; l'esperienza gli può offrire soltanto l'occasione di servirsene e con ciò di prenderne coscienza (Poincaré 1902, 31).

Cassirer vede riaffermato, in Poincaré e Weyl, il carattere *costruttivo* della matematica pura (in un'accezione peculiarmente cassireriana, di cui qui abbiamo potuto vedere solo alcuni tratti e che richiederebbe di essere precisata, comunque difficile da ricondurre a posizioni costruttiviste note), nel senso che essa può giungere a possedere i suoi oggetti solo facendoli sorgere da un *Urprinzip*:

> Qui dunque è nuovamente riconosciuto nella sua pienezza il carattere *costruttivo* della matematica pura, il fatto che questa possiede i suoi concetti, perciò i suoi *oggetti*, solo in quanto li può far scaturire da un principio originario (130).

La linea argomentativa fondamentale adottata da Cassirer dovrebbe essere sufficientemente chiara: riconosciuto come inadeguato, anche in matematica, il modello della conoscenza come adeguazione, il problema della libera ma non per questo arbitraria costruzione dell'oggetto matematico e dell'oggettività della conoscenza che lo riguarda può essere affrontato soltanto mediante un'ontologia *relazionale* e un'epistemologia *simbolica*, inscindibili, interne alla matematica stessa. In entrambe è fondamentale il ruolo della sintesi, nel senso di costruzione di oggetti e di posizione di concetti come principi di formazione di ordinamenti che in certo modo precedono e costituiscono le molteplicità ordinate. Questo impone un ripensamento radicale della natura stessa del concetto, in particolare per quanto riguarda la sussunzione sotto di esso dei membri della sua estensione, e ha conseguenze che vanno in senso opposto alle prospettive fondazionali logiciste classiche, nella direzione di un costruttivismo peculiare, irriducibile a qualsivoglia posizione costruttivista nota. Naturalmente ci sono numerosi problemi aperti: in primo luogo, una migliore caratterizzazione della nozione di sintesi come viene intesa e trasformata da Cassirer, su una linea coerentemente kantiana a partire dal *Funktionsbegriff* ma via via accentuando il ruolo correlativo e indispensabile delle formazioni simboliche rispetto alla costituzione relazionale degli oggetti matematici; in secondo luogo, il ruolo preciso di questa costituzione come risposta al problema della libera e nondimeno autentica oggettività matematica; in terzo luogo, la natura del concetto come forma e principio di ordinamento e costruzione, in rapporto alla molteplicità che viene ad essere costituita e ordinata e alle ordinarie forme di sussunzione e subordinazione; inoltre, un ulteriore chiarimento dell'uso dei termini "analitico" e "sintetico" nelle (e in rapporto alle) classiche polemiche dei logicisti; infine, la precisazione della nozione cassireriana di *costruzione*, in quanto non accompagnata dall'accettazione da parte sua di limitazioni costruttiviste all'ambito della matematica dotata di senso. Più in generale, sarebbe necessaria una chiarificazione della *pars construens* di tutta la discussione, soprattutto delle possibili ambiguità che permangono tra la proposta di un'interpretazione neokantiana della possibilità di quel tipo di conoscenza che si esprime nella matematica contemporanea presa così come si dà, da una parte, e dall'altra possibili scelte di campo fondazionali riformatrici da parte di Cassirer.

5. Un'alternativa neokantiana

Abbiamo considerato il punto di vista di Cassirer su alcune classiche questioni di filosofia della matematica, cercando di mostrare la ricchezza degli orizzonti che si aprono, nel pieno rispetto della natura propria del pensiero matematico contemporaneo, in questa prospettiva. Vediamo ora, in conclusione, quali possono essere, più in generale, i tratti caratteristici di un punto di vista neokantiano in quest'ambito, concentrandoci in particolare sulla questione dello status degli enunciati dei linguaggi matematici formali di base riguardo alla loro *verità*. Secondo una visione ampiamente condivisa tra i matematici e alcuni filosofi della matematica, ci sarebbe un elemento metafisico nell'ordinaria concezione semantica della verità degli enunciati matematici (come sopra abbiamo accennato): la postulazione di una realtà di cui quegli enunciati sono veri. Questa è (in estrema sintesi) la posizione *opposta* rispetto a quella che stiamo considerando. Non abbiamo cercato qui di confutare direttamente questa posizione "metafisica", quanto piuttosto di delineare una visione molto diversa, in cui l'elemento metafisico di cui sopra appare del tutto irrilevante per la semantica delle teorie matematiche. Si tratta di una prospettiva che è un'alternativa radicale al realismo, rifiutando già la stessa formulazione delle domande che deriva da presupposti realisti. Possiamo chiamarlo, in generale, "punto di vista trascendentale", pur non implicando una stretta fedeltà storica al pensiero di Cassirer, che tuttavia come abbiamo visto è il candidato più naturale a essere il punto di partenza di una riflessione sulla matematica che possa sfuggire alle dicotomie consolidate di alcune tipiche filosofie della matematica contemporanee, ad esempio, il rifiuto di considerare qualcosa come oggettivo se non è reale, in senso empirico o fisico o platonico. Parliamo di "trascendentale" perché vogliamo mostrare alcune conseguenze di un punto di vista in cui l'ontologia e l'epistemologia della matematica si impostano entrambe a partire dal *dato di fatto* della conoscenza matematica, risalendo alle *condizioni della sua possibilità*, senza imporre per così dire dall'esterno ontologie o epistemologie precostituite.

Possiamo dare due esempi in questo senso. In primo luogo, invece di chiederci (con Benacerraf 1973, vedi sopra) come possiamo avere accesso epistemico agli enti matematici, potremmo provare a spiegare il motivo per cui la matematica non ha alcun problema di accesso agli enti di cui si occupa, e a quali condizioni questa attività sia possibile, unendo libertà di costruzione concettuale e ricerca di verità in un modo tale che non c'è nulla di paragonabile in nessun'altra scienza. Un altro esempio: si potrebbe tentare di uscire dall'impasse classica (sopra discussa) sull'univocità dell'interpretazione dei linguaggi formali delle teorie matematiche fondamentali, considerando questa unicità come una sorta di ideale regolativo (nel senso di Kant: vedi KrV B 671). In questo senso, ad esempio, l'universo degli insiemi potrebbe essere considerato non una misteriosa sostanza, ma invece qualcosa di analogo all'oggetto trascendentale (nel senso dell'*Analitica dei principi*: vedi KrV B 295, A 253), oppure a un'idea della ragione (vedi KrV B 378ss.). Un aspetto fondamentale della visione che ispira queste riflessioni è il seguente: gli assiomi (passati, presenti e futuri) sono al centro della matematica in quanto *costitutivi* della realtà matematica. Si pone quindi il compito di comprendere la natura sintetica dell'assiomatizzazione e le condizioni trascendentali di possibilità di tale sintesi.

Abbiamo di fatto una matematica intelligibile (la matematica è infatti ciò che è più intelligibile, ed è la fonte di ogni altra intelligibilità scientifica), i cui oggetti primitivi (in senso relativo) possono essere colti con la massima chiarezza (in linea di principio); ma allora il suo oggetto deve essere qualcosa di essenzialmente intelligibile; quindi, se vogliamo rendere ragione dell'oggettività della matematica, dobbiamo accettare una nozione di oggettività che renda conto dell'intelligibilità, una nozione in cui l'intelligibilità è incorporata, per così dire. Ma una nozione realista di oggettività non soddisfa tale requisito, e questo ci porta a rifiutare il corrispondente tipo di realismo. Che cosa possiamo proporre come alternativa? Stiamo considerando qui la possibilità di accettare qualcosa come una "rivoluzione copernicana", nel senso di Kant, nella filosofia della matematica. Proprio come quella rivoluzione nell'epistemologia generale aveva lo scopo di salvare l'oggettività della scienza senza dover assumere un realismo epistemicamente autodistruttivo, così si propone qui qualcosa di simile nella filosofia della matematica. Certamente questo è un contesto radicalmente diverso, ma c'è un elemento filosofico comune: in entrambi i casi il realismo potrebbe sembrare a prima vista l'unica via d'uscita dallo scetticismo; in entrambi i casi la vera via d'uscita è, al contrario, abbandonare il presupposto che la conoscenza debba essere una riproduzione della realtà, e abbracciare la visione opposta, mettendo al centro le condizioni di possibilità della conoscenza. Nelle ben note parole di Kant:

> Finora si è supposto che tutta la nostra conoscenza debba conformarsi agli oggetti. Ma tutti i tentativi di ampliare la nostra conoscenza degli oggetti stabilendo qualcosa a priori riguardo ad essi per mezzo di concetti, su questo presupposto, sono falliti. Dobbiamo quindi provare se possiamo avere più successo nei compiti della metafisica supponendo che gli oggetti debbano conformarsi alla nostra conoscenza. Ciò corrisponderebbe meglio a ciò che si desidera, cioè che sia possibile avere una conoscenza a priori degli oggetti, determinando qualcosa riguardo ad essi prima che siano dati. Dovremmo allora procedere proprio sulla falsariga dell'ipotesi primaria di Copernico. Non riuscendo a spiegare in modo soddisfacente il movimento dei corpi celesti supponendo che girassero tutti attorno allo spettatore, egli si chiese se non avrebbe avuto miglior successo se avesse fatto girare lo spettatore e restar ferme le stelle (KrV B XVI).

Allo stesso modo, la "rivoluzione copernicana" di cui parliamo è un tentativo di considerare l'intelligibilità, la comprensibilità, la conoscibilità come qualcosa di inerente alla nozione di "realtà" matematica, pur senza sostenere una filosofia costruttivista della matematica. In particolare, non si dovrebbe cercare una soluzione al problema della semantica dei linguaggi matematici formali di base accettando un quadro filosofico generale che sembra impedire a priori qualsiasi soluzione: un quadro basato sulla dicotomia tra soggetto e oggetto, o tra ciò che è interno e ciò che è esterno, o tra il mentale e il reale. Questo quadro è filosoficamente problematico, e lo è ancora di più nel caso della matematica, perché dal punto di vista che stiamo considerando la matematica non è né un prodotto della mente né una descrizione di un mondo esterno (magari iperfisico). Si propone invece di prendere sul serio l'idea che il mondo matematico è un mondo di concetti, il mondo delle *possibilità* del pensiero nel senso più generale. Qui, naturalmente, il pensiero non è inteso come un'attività mentale, non è l'atto di pensare, ma è semplicemente ciò che è pensato, indipendentemente da qualsiasi soggetto psicologico; ma non è nemmeno una realtà "a parte", platonica, perché, in un certo senso, non è neppure una realtà, è solo una *condizione logica* (nel senso più generale) di ogni realtà possibile e concepibile (qui intesi come sinonimi, non connotati né oggettivamente né soggettivamente). Se ci si chiede, a questo punto, se queste “condizioni logiche” sono, a loro volta, soggettive o oggettive, allora non si comprende il senso di questa proposta, che è quello di provare a pensare a questi problemi senza porsi la domanda stessa. C’è un senso in cui la domanda è legittima, e la risposta è che, ovviamente, le condizioni logiche sono perfettamente oggettive, e non c’è nulla di soggettivo in esse. Questa è una verità profonda presente in ogni forma di realismo, ma significa semplicemente che la matematica non è semplicemente il prodotto soggettivo dell’attività mentale degli individui (né di “comunità”).

È importante notare che, in questa prospettiva (come in altre, per esempio quelle fenomenologiche), c’è un senso in cui l’oggettività ha un’estensione molto più ampia della realtà. La matematica è la forma suprema e onnipervasiva di oggettività, che precede logicamente la costituzione di ogni realtà, e in particolare ogni dicotomia tra soggetto e oggetto. D’altro canto, i concetti matematici sono umanamente intelligibili, perché sono proprio ciò che costituisce la matematica stessa come attività umana: gli esseri umani sono capaci di fare matematica, in quanto la matematica è fondamentalmente definita da ciò che essi fanno sotto questo nome, il che non significa, però, che si possa chiamare matematica ciò che si vuole; significa solo che i criteri in base ai quali possiamo distinguere la matematica da altro sono interni alla matematica stessa. Il punto è che in questa attività propriamente umana i concetti che emergono sono radicalmente *trascendenti* rispetto all’attività stessa (in un senso diverso rispetto ai concetti della fisica): una volta emersi, questi concetti non hanno alcun legame con la mente umana, non nel senso che non possano essere afferrati (anzi, la possibilità di afferrarli, almeno in linea di principio, è la loro essenza), ma nel senso che nulla nel loro contenuto presuppone qualcosa che abbia a che fare con la cognizione. Questo fenomeno appare filosoficamente problematico, per non dire misterioso, ma è molto più misterioso da quei punti di vista filosofici che non accettano il *fatto* della conoscenza matematica come punto di partenza: una prospettiva “trascendentale” neo-kantiana compie questo passo decisivo. Mostrare che esso non è una *petitio principii* richiederebbe ancora certamente un lungo lavoro nell'ambito della filosofia della matematica (come pure in quello della storia della matematica), ma evidenziare il problema sembra filosoficamente più onesto che dare un'immagine poco fedele della matematica solo per poterla inserire in una preesistente visione filosofica.

Capitolo Quarto
Una prospettiva naturalista

1. Naturalismo matematico

Un'impostazione *naturalista* per la filosofia della matematica è stata sostenuta, più di ogni altro, da Penelope Maddy: è lei che per prima ha cercato di seguire in profondità le conseguenze di tale impostazione, mettendo in primo piano alcune fondamentali questioni epistemologiche e metodologiche che emergono in particolare in certi sviluppi recenti della teoria degli insiemi, per cui discuteremo qui principalmente alcuni suoi contributi (Maddy 1994, 1996, 1997, 2011), quelli in cui il suo originale "naturalismo insiemistico" ha un ruolo centrale.

Il naturalismo di Maddy accetta il quadro fondazionale generale fornito dalla teoria degli insiemi, per cui conviene in primo luogo accennare ad alcuni sviluppi di quest'ultima rilevanti per la discussione che segue. Nella teoria degli insiemi raramente c'è stato un periodo di maggiore vitalità di quello degli ultimi decenni: una vitalità che dalla seconda metà degli anni '60 del '900 (dopo i risultati epocali di Paul Cohen) non si è più spenta, e che ha visto prima a partire dagli anni '80 il congiungersi dei tre grandi filoni di ricerca sui grandi cardinali, sulle ipotesi di determinatezza e sui modelli interni, poi a fine secolo (per ricordare un esempio significativo) le ricerche di Hugh Woodin sull'Ipotesi del continuo e infine (anche in tempi molto recenti) i risultati sui vari "assiomi di forcing" e le loro conseguenze; una ricerca, se vogliamo, "introversa", rivolta essenzialmente alla chiarificazione matematica interna della teoria, e tuttavia ricchissima di nuovi risultati e di nuovi problemi. Non è questa la sede in cui si possano descrivere, anche solo sinteticamente, tali risultati e problemi, e comunque ciò non sarebbe conforme agli obiettivi del nostro lavoro, per cui ci limitiamo a ricordare (per la loro importanza) due esempi classici: la dimostrazione (ottenuta da Tony Martin, John Steel e Hugh Woodin) che opportuni assiomi di grandi cardinali implicano ipotesi di determinatezza sufficienti per l'*intera* teoria descrittiva degli insiemi; l'elaborazione (ad opera di John Steel, William Mitchell e altri) di una teoria dei modelli interni per ipotesi di grandi cardinali sempre più forti (per una prima introduzione si può vedere Jensen 1995). Di fronte a questo sviluppo, la riflessione metodologica e, più in generale, filosofica si è trovata non di rado indietro, come è testimoniato, per esempio, dalla seconda edizione dell'antologia *Philosophy of Mathematics* di Benacerraf e Putnam (1983), che contiene un'intera sezione di saggi, pur fondamentali, dedicati al concetto di insieme, scritti al più tardi nella prima metà degli anni '70, che riguardano prevalentemente temi come la concezione iterativa dell'universo insiemistico (in base alla quale – ricordiamo – gli insiemi sono formati in una serie di stadi, a partire dall'insieme vuoto, prendendo ad ogni stadio tutte le possibili collezioni di oggetti dello stadio precedente). Seguendo Maddy, ora ci proponiamo invece di condurre una riflessione *metodologica* proprio su alcuni sviluppi recenti ma ormai classici, cercando nell'attuale ricerca avanzata in teoria degli insiemi una fonte di questioni filosofiche che emergano dalla ricerca stessa e siano dettate non da una chimerica volontà di "fondare" ma da un tentativo di comprensione critica. Specificamente, cercheremo di mettere in opera, nella discussione filosofica sulla teoria degli insiemi, considerazioni in qualche misura analoghe a quelle emerse nella riflessione sui problemi metodologici delle scienze naturali, con particolare riguardo al rapporto tra prospettiva naturalistica, nel senso (ma non solo) della naturalizzazione dell'epistemologia, e realismo. Il *naturalismo*, come qui viene inteso, consiste nell'abbandonare decisamente l'obiettivo di una filosofia prima, nel considerare la scienza come fallibile ma capace di trarre la sua giustificazione unicamente dall'osservazione e dal metodo ipotetico-deduttivo. Conseguenza immediata di questa posizione è che l'epistemologia non può che essere parte della scienza stessa, e che qualsiasi conflitto tra la pratica scientifica e la filosofia dev'essere risolto sacrificando quest'ultima. Il banco di prova di ogni riflessione filosofica sulla matematica sarà quindi la sua capacità di rendere conto della effettiva pratica dei matematici. Non si tratta perciò di trovare conferme a filosofie generali della matematica, né di "fondare" gli assiomi su presunti "princìpi filosofici", né di continuare a considerare la teoria degli insiemi come si configurava decenni fa, né tanto meno di proporre l'eliminazione di parti della teoria (o di imporne la "riscrittura") in seguito ad accuse di insensatezza su basi filosofiche; si tratta invece di render conto della teoria degli insiemi *come è praticata*, senza intenti riformatori. Più difficile è chiarire il significato del termine "realismo" (come abbiamo visto in precedenza); senza tentare una definizione generale, possiamo sottolinearne due significati che sono quelli rilevanti qui: nel primo, il realismo è un'assunzione di esistenza di oggetti fisici (macroscopici e microscopici) aventi proprietà indipendenti dalla concettualizzazione, sulla cui esistenza e sulle cui proprietà e relazioni le uniche fonti ammesse sono le scienze naturali (con un posto centrale dato alla fisica); esiste poi una seconda nozione di realismo, diversa dalla prima, benché ad essa molto vicina, che si riferisce non più alle scienze in generale, ma specificamente alle matematiche: in questo secondo senso il realismo è la prospettiva secondo cui la matematica è una scienza che studia oggetti specifici astratti, tali che qualsiasi domanda posta riguardo ad essi ha una risposta, positiva o negativa, del tutto indipendentemente dalle capacità di verifica (per quanto possano essere idealizzate) di un soggetto conoscente (comunque inteso). Una posizione di questo genere si trova, ad esempio, negli scritti filosofici di Kurt Gödel. Discutendo il lavoro di Maddy ci chiederemo se esista un "naturalismo insiemistico" che non richieda, se sviluppato coerentemente, una filosofia realistica nel *secondo* dei significati che abbiamo distinto, come suo presupposto necessario, o quanto meno naturale. Una caratteristica fondamentale del naturalismo è il rifiuto di ogni posizione filosofica che non sia conseguenza o generalizzazione di teorie scientifiche; ma difficilmente un realismo platonista, con le sue profonde connotazioni "metafisiche", può essere ottenuto come conseguenza o generalizzazione a partire dalla scienza; se dunque la risposta è negativa stiamo di fatto negando la possibilità di un naturalismo insiemistico.

Conviene iniziare da una considerazione di un certo tipo di argomenti che si fondano sull'applicabilità della matematica nelle scienze naturali, i cosiddetti "argomenti di indispensabilità", che sono stati sostenuti originariamente da autori di primo piano come Quine e Putnam, argomenti che nel caso di Quine (si veda ad es. Quine 1981) si inseriscono proprio in un contesto naturalistico. Gli argomenti di indispensabilità sono volti a negare ogni netta separazione tra matematica e scienze naturali: in base ad essi, le teorie scientifiche asseriscono l'esistenza di funzioni e insiemi in un senso analogo a quello in cui asseriscono l'esistenza dei corpi macroscopici, e si pongono di fronte all'esperienza olisticamente, al punto che anche la matematica ed addirittura la logica di cui la teoria fa uso sono messe a confronto (per quanto remoto) con l'esperienza. L'indispensabilità emerge dalla considerazione che non solo la matematica fa parte della migliore teoria scientifica universale che abbiamo (ed è per questo che talvolta si parla, in questo contesto, di "inferenza alla miglior spiegazione"), ma che tale teoria, almeno in ampie sue parti, non sarebbe neppure formulabile senza far riferimento a entità matematiche. Se quindi certe entità matematiche sono indispensabili nella nostra migliore teoria scientifica, e riteniamo vera tale teoria, dobbiamo credere in tali entità. Ne risulta una sostanziale assimilazione di matematica e fisica, sia dal punto di vista ontologico, sia dal punto di vista epistemologico, in quanto la conferma o falsificazione avvengono in modo olistico e quindi parallelo per le due scienze. Questa posizione è sostanzialmente di tipo realistico, nel primo dei due significati visti sopra, e si contrappone soprattutto alle prospettive che negano una "organizzazione intrinseca" della natura e che rifiutano di considerare vero ciò che è ritenuto soltanto una mera "organizzazione del dato", qualunque cosa ciò significhi. Inoltre, dato il contesto naturalistico, le scienze sono nello stesso tempo le garanti della fondatezza del loro tipo di indagine, secondo la prospettiva di naturalizzazione alla Quine in cui l'epistemologia è parte della scienza. La cosiddetta "inferenza alla miglior spiegazione", strettamente legata agli argomenti di indispensabilità, parte dal riconoscimento del posto centrale della matematica nella nostra migliore spiegazione dei fenomeni, per concludere che la matematica stessa deve essere ritenuta vera, e quindi si deve credere nelle entità di cui essa asserisce l'esistenza. In altre parole, la credenza nelle teorie scientifiche, insieme al riconoscimento dell'indispensabilità delle entità matematiche in tali teorie, conduce alla credenza nelle entità matematiche; la matematica viene così confermata insieme alla teoria fisica in cui compare in un ruolo indispensabile. È chiaro che le considerazioni di indispensabilità devono essere in qualche modo qualificate: non solo le "speculazioni" sull'infinito superiore che si esprimono in quegli assiomi forti dell'infinito che sono detti "ipotesi di grandi cardinali" (ipotesi ancora prive di qualsiasi applicazione extra-matematica) non sono sentite da chi le pratica come giustificate semplicemente in quanto applicabili; ciò vale anche per l'Analisi, che viene quotidianamente applicata, non solo in quanto entra in gioco ovunque si abbia a che fare con il *continuo*, ma in quanto costituisce lo studio del concetto di *funzione* portato alla sua massima generalità e profondità. Non è difficile comunque venire incontro a questa osservazione; è sufficiente modificare gli argomenti di indispensabilità, secondo l'esempio seguente: in fisica l'Analisi è indispensabile; il Continuo insiemistico ci fornisce la migliore spiegazione dell'Analisi; l'indispensabilità giustifica la nostra credenza nel Continuo insiemistico e nei metodi con cui viene costruito; esaminati ed estesi in modo matematicamente giustificabile, questi ultimi conducono alla classica teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'Assioma di scelta (ZFC).

Se vogliamo considerare l'uso di questo genere di argomenti nell'ambito specifico della riflessione metodologica sulla teoria degli insiemi conviene concentrare l'attenzione su un problema particolare, quello della misurabilità degli insiemi di numeri reali. Assumere questo problema come filo conduttore per discutere criticamente gli argomenti di indispensabilità non è solo un modo per fissare le idee e per seguire una linea tra le molte degli sviluppi recenti in teoria degli insiemi, ma anche una fonte di esempi significativi di un contesto di argomentazioni, interpretazioni e valutazioni non strettamente formali, che intervengono nella giustificazione di ciò che nella teoria degli insiemi non è sostenuto da dimostrazioni: gli assiomi e gli enunciati indipendenti dalla teoria stessa. Seguiremo quindi questo filo conduttore, mantenendoci nell'esposizione su un livello informale e rimandando per tutte le definizioni rilevanti (dalla cui formulazione esatta comunque non dipende l'argomentazione presentata) ad un qualsiasi testo avanzato di teoria degli insiemi (per es. Kanamori 1994).

Quando si considerano i sottoinsiemi della retta reale dal punto di vista della possibilità di dare di essi una definizione in uno specifico linguaggio formale, si introducono gerarchizzazioni in cui tali sottoinsiemi vengono distribuiti su livelli sempre più alti con il crescere della complessità (in termini logici, di alternanze di quantificatori) della loro definizione. Le due gerarchie fondamentali sono quella *boreliana* (dal nome dell'analista francese Émile Borel) e quella *proiettiva*: la prima è costituita da tutti gli insiemi ottenibili a partire dagli insiemi aperti, mediante le operazioni di complemento e di unione su famiglie numerabili di insiemi; la seconda è costituita da tutti gli insiemi definibili mediante operazioni di proiezione (ricordiamo che intuitivamente, nel caso bidimensionale, la proiezione di un sottoinsieme del piano cartesiano è la sua "ombra" su uno dei due assi) e complemento. Gli insiemi proiettivi possono senz'altro essere considerati insiemi "semplici" dal punto di vista della loro definibilità. Eppure, già a livelli molto bassi nell'ambito della loro gerarchia, ovvero fin dal livello che si indica con "Δ^1_2" (*boldface*) si presentano difficoltà apparentemente insormontabili quando cerchiamo di stabilire se per essi valga una proprietà naturale come la misurabilità secondo Lebesgue. Gödel dimostrò infatti (Gödel 1938) l'esistenza di un modello della teoria ZFC in cui esiste un insieme Δ^1_2 non misurabile, e quindi che la misurabilità degli insiemi di tale complessità non può essere dimostrata nella teoria stessa; d'altra parte, Solovay, dopo aver dimostrato (Solovay 1969) che condizione sufficiente affinché tutti gli insiemi Σ^1_2, e di conseguenza tutti i Δ^1_2, siano misurabili, è che esista un cardinale misurabile (un cardinale *k* su cui esiste una misura non banale a due valori totale e *k*-completa; si veda Drake 1974 o Kanamori 1994), costruì nel 1970 un modello di ZFC in cui tutti gli insiemi proiettivi di numeri reali sono misurabili (Solovay 1970), dimostrando così che la misurabilità degli insiemi Δ^1_2 non può neppure essere refutata in ZFC, ovvero non si può dimostrare in ZFC che tali insiemi non sono misurabili (sotto l'ulteriore ipotesi che non si possa refutare in ZFC l'esistenza di un cardinale inaccessibile, ipotesi unanimemente considerata accettabile in questo contesto). Questi risultati, presi insieme, spiegano perché ogni tentativo di dimostrare o refutare la misurabilità degli insiemi Δ^1_2 sia disperato, se la teoria in cui si lavora, più o meno consapevolmente ed esplicitamente, è la teoria ZFC: la questione è indipendente dalla teoria. La non banalità del risultato è evidente se si pensa che, esclusi i matematici di esplicita appartenenza intuizionista o predicativista o altrimenti costruttivista, tutta l'Analisi classica è sviluppata in tale teoria, spesso anche da parte di chi, come gli analisti francesi di inizio '900 (Baire, Borel, Lebesgue) ha dubbi sull'assioma di scelta e sul trattamento cantoriano dell'infinito attuale; e certamente lo è da parte della grande maggioranza dei matematici, che di solito ignorano o respingono consapevolmente le limitazioni delle correnti menzionate. Questo risultato rende necessaria una discussione della sensatezza stessa del problema della misurabilità degli insiemi Δ^1_2. È un problema genuino? Ammesso che sia tale, è un problema di ricerca matematica o piuttosto ha irriducibili connotazioni "fondazionali" tali da sfuggire a una decisione in ambito strettamente formale?

Per far vedere la problematicità degli argomenti di indispensabilità, Maddy propone l'esempio della teoria atomico-molecolare in chimica, per mostrare che a volte sono gli scienziati stessi a distinguere chiaramente tra l'accettazione di un certo tipo di entità in quanto necessarie alla spiegazione e la credenza nella loro esistenza. Si può dire che già dal 1860 gli atomi fossero le unità fondamentali della chimica, eppure bisogna aspettare il 1913 (con il lavoro di Jean Perrin) perché siano accettati universalmente come *reali* (Maddy 1994, 385). Da questo punto di vista, non possiamo fondare l'argomentazione che sostiene la verità della matematica basandoci sul fatto che essa è parte della nostra migliore spiegazione dell'esperienza. Riemerge quindi una possibile alternativa: si potrebbe sostenere che la matematica non ha nessun contenuto *proprio* di verità, e che essa non fa altro che riconoscere legami di conseguenza logica tra enunciati, limitandosi ogni volta a porre un insieme di assunzioni assiomatiche che non vengono interpretate, e a vedere che cosa ne segue logicamente, senza nessuna esigenza di verità. Ma di fronte a questa alternativa, il naturalista può obiettare che ogni comprensione (ad esempio) della nozione di moto richiede almeno le nozioni di funzione e di continuità; non solo: la teoria della relatività generale sembra richiedere, salvo reinterpretazioni (comunque niente affatto ovvie), la continuità dello spazio-tempo. Quindi, la concezione moderna, diciamo pre-quantistica, di uno spazio fisico continuo sembra comunque richiesta dalla fisica, e se l'esistenza dello spazio è presa letteralmente, se un continuo fisico esiste, allora non si vede perché non dovrebbe essere un problema genuino quello della misurabilità di certe ben precise regioni di quello stesso spazio, quelle la cui complessità definitoria è, appunto, al livello sopra indicato. Quindi, la legittimità del problema di misurabilità dipenderebbe, in ultima analisi, dalla risposta alla domanda seguente: la continuità dello spazio è reale o è un artefatto della modellizzazione matematica? Se la domanda è questa, siamo condotti a cercare risposte nella fisica contemporanea: Maddy, ad esempio, menziona Feynman e altri, mostrando come i dubbi sulla reale continuità dello spazio siano frequenti tra i fisici (Maddy 1994, 401). Ma allora, la continuità è verificata in senso forte o semplicemente utile? Nel secondo caso, l'argomento di indispensabilità per ZFC non è più conclusivo. Non per questo l'Analisi scompare dalla fisica, ma per il naturalista il passo decisivo è fatto: ogni interpretazione letterale dell'Analisi, in senso realistico stretto, è da escludersi, e siamo costretti ad ammettere spiegazioni alternative, tra cui quella che riduce la matematica a mero riconoscimento di legami di conseguenza logica tra enunciati non interpretati. Se quest'ultima posizione sembra non rendere conto della selezione tra i possibili assiomi che di fatto continuamente avviene, altre posizioni anti-realistiche non soffrono di questo difetto: ad esempio, c'è la possibilità di considerare i risultati di indipendenza da ZFC (come quello sulla misurabilità) come sollecitazioni per il matematico a estendere la teoria così come uno scrittore estende un racconto. A parte i problemi che questa analogia comporta, ciò che qui interessa è che, a rigore, si arriva a questa conclusione: la scelta tra realismo e anti-realismo dipenderebbe dalla continuità dello spazio-tempo, e questa conclusione ha davvero qualcosa di strano, e costituisce un problema non banale per il sostenitore degli argomenti di indispensabilità, specialmente in quanto non rende conto della pratica matematica corrente. È la pratica stessa dei matematici, dunque, a far sorgere seri dubbi sugli argomenti di indispensabilità. Chiudere la discussione dicendo che il problema di misurabilità da cui siamo partiti ha tanto poco senso, a causa dell'indipendenza da ZFC, quanto, poniamo, la domanda se *i gruppi* siano o no commutativi, non è una mossa che si possa ammettere nel nostro caso, dato che di fatto i matematici tentano di rispondere al primo problema, e ovviamente non al secondo. Se pure di fronte a questo fatto non si deve assumere un atteggiamento dogmatico, in quanto potrebbe sempre rivelarsi come un esempio di cattiva metodologia (non dimentichiamo che le *intenzioni* di individuare un'unica teoria non sono di per sé una garanzia che ciò avvenga), il fatto resta comunque da spiegare; e se anche concludessimo che le ragioni sono meramente storiche o sociologiche (è dubbio che ciò sia possibile) già avremmo ottenuto un risultato significativo.

Il problema da cui siamo partiti è il problema della misurabilità di certi insiemi di numeri reali. Certamente, benché in questo campo i confini siano labili, si tratta di una questione più vicina all'Analisi ordinaria di quanto non lo siano altre questioni indipendenti, come l'Ipotesi del continuo (CH), che si riferisce a *tutti* gli insiemi di numeri reali e quindi sembra far parte propriamente della teoria degli insiemi; di qui il maggiore interesse del primo problema per i matematici, anche quelli che non hanno alcuna formazione o interesse logici. Sembra che le possibili reazioni di fronte ai risultati di indipendenza possano venir classificate nel modo seguente. Il matematico di inclinazioni più o meno consapevolmente realiste, e più in generale chiunque accetti gli argomenti di indispensabilità, risponderà che esiste una risposta determinata al problema; ma non sappiamo ancora quale, e il fatto che la teoria ZFC non consenta di saperlo è uno dei molti sintomi della sua debolezza: si tratta perciò di estenderla fino a trovare principi nuovi, ad esempio quei principi forti di riflessione che sono gli assiomi di grandi cardinali, che ci dicano qualcosa di più sull'universo degli insiemi. Invece, il matematico di inclinazioni anti-realiste riterrà che non c'è una risposta determinata al problema di misurabilità, poiché tutto quello che possiamo e dobbiamo sapere sugli insiemi è codificato in ZFC; tutto ciò che si dimostra indipendente offre semplicemente la possibilità di sviluppare teorie alternative, nessuna delle quali può avere pretese di descrivere alcunché. Il sostenitore dell'argomento di indispensabilità nella sua forma più semplice, che si appella semplicemente all'uso della matematica nella fisica, dovrebbe scegliere la prima alternativa in una versione debole che, pur riconoscendo che il valore di verità della questione è determinato, non ritiene necessario cercare una risposta almeno finché la questione non diventa rilevante per la fisica; chi invece sostiene l'argomento di indispensabilità nella sua forma più raffinata riterrà che si debba già adesso cercare una risposta al problema, e che la valutazione di nuovi candidati al ruolo di assiomi non derivi dalle applicazioni fisiche, ma resti interamente all'interno della matematica: è il successo della matematica nel suo insieme a giustificare tale valutazione. Quello che importa, tuttavia, non è tanto questa possibile divisione tra i sostenitori degli argomenti di indispensabilità, quanto il fatto che la legittimità del problema di misurabilità resta in ogni caso sospesa allo *status* della fisica: se avessimo, come si suol dire, una completa "quantizzazione" della fisica, tale da rendere tutta la matematica del continuo nient'altro che un'utile idealizzazione, chi sostiene gli argomenti di indispensabilità non potrebbe far altro che assumere una qualche forma della seconda posizione, secondo cui non esiste una risposta determinata al problema di misurabilità considerato. Le conseguenze sul piano metodologico di queste differenziazioni sono abbastanza chiare: se è corretta la seconda posizione, allora rimane ben poco da dire sulla misurabilità degli insiemi Δ^1_2, dato che l'enunciato corrispondente risulta privo di valore di verità, e ogni sviluppo in un senso o nell'altro potrà essere valutato solo sulla base di preferenze estetiche. Ciò è in flagrante contraddizione con la pratica matematica di chi fa ricerca in teoria degli insiemi. Resta aperta la possibilità che, pur accettando la seconda posizione, e quindi ammettendo che non c'è nessun fatto sulla misurabilità degli insiemi Δ^1_2 che possa e debba essere scoperto, si ritenga che l'aggiunta di nuovi assiomi a ZFC non sia arbitraria: in questo caso, i risultati di indipendenza non sono, per così dire, l'ultima parola di una vecchia storia, ma la prima di una nuova. È naturale chiedersi che cosa distingue questa posizione da quella del sostenitore dell'argomento di indispensabilità più raffinato; d'altra parte, non è difficile rispondere che quest'ultimo, per i suoi presupposti realisti (nel secondo significato), è costretto ad ammettere la possibilità di assiomi *veri benché indesiderabili* (come potrebbe essere pur sempre, per quanto ne sappiamo, l'Ipotesi di costruibilità, che discuteremo a breve). È quindi necessario scegliere tra le due metodologie. Se è vero che la pratica contemporanea di chi lavora nella teoria degli insiemi sembra andare piuttosto nel senso di estensioni non arbitrarie in cui la desiderabilità prevale su ogni altra considerazione, rimane il fatto che i teorici degli insiemi contemporanei non sono minimamente interessati alle scoperte della fisica, in particolare ai problemi della gravità quantistica, a cui invece dovrebbero essere interessati se la scelta tra le due metodologie dipendesse dalla totale "quantizzazione" della fisica. Abbiamo quindi ottenuto una conclusione analoga a quella raggiunta sopra: gli argomenti di indispensabilità rendono inspiegabile la pratica scientifica corrente. È chiaro che per una epistemologia naturalizzata coerente questo è sintomo della loro totale inaccettabilità; ma anche per chi non accetta la naturalizzazione dell'epistemologia gli argomenti di indispensabilità restano difficilmente sostenibili nelle forme finora proposte.

Si pone quindi la questione se sia possibile conservare una prospettiva naturalistica di fronte a queste difficoltà. Maddy (1996) risponde modificando tale prospettiva, prendendo atto dell'insostenibilità degli argomenti di indispensabilità. Come sfondo su cui far vedere per contrasto i caratteri salienti del naturalismo, vengono delineate brevemente dall'autrice due forme iper-semplificate e piuttosto caricaturali di formalismo e realismo. Quest'ultimo è caratterizzato dal ritenere la matematica una scienza sullo stesso piano della botanica o dell'astronomia; il formalismo, in una forma non problematica (che non ha molto a che fare né con Hilbert, né con Curry, né con Abraham Robinson), dal ritenere la matematica fondamentalmente affine alle arti. Non ci soffermeremo qui sulle debolezze che l'autrice attribuisce ora al realismo platonista, non solo perché si tratta di argomenti *standard*, ampiamente discussi nella letteratura, su cui non sembra emergere niente di nuovo, ma soprattutto perché l'argomentazione principale e originale non dipende da essi. Si tratta, comunque, dei due argomenti classici: l'assenza o comunque la difficoltà di trovare una plausibile teoria di un'intuizione specificamente matematica alla Gödel (si veda ad esempio Gödel 1947, ristampato con importanti aggiunte in Benacerraf-Putnam 1983), e il problema di Benacerraf (1973). D'altra parte, Maddy non prende come punto di partenza neppure quel compromesso tra il realismo platonista di Gödel e il naturalismo di Quine che lei stessa aveva tentato di elaborare nel libro *Realism in Mathematics* (1990), secondo il quale la matematica è una scienza in gran parte vera, poiché è applicata indispensabilmente e con successo nelle altre scienze, ma ha caratteristiche che la distinguono dalle altre scienze, tra le quali l'"ovvietà" delle sue parti elementari e metodi di giustificazione che le sono propri. L'autrice riconosce infatti che questo compromesso ha il difetto di fondarsi proprio sugli argomenti di indispensabilità di cui riconosce la debolezza e l'infedeltà alla pratica scientifica. Ma proprio tale infedeltà riapre il problema del rapporto, in generale, tra filosofia e scienze: se in Gödel le considerazioni intramatematiche precedono e fondano quelle filosofiche in difesa del realismo platonista (e non viceversa), in Quine la giustificazione degli assunti ontologici della matematica è interna non ad essa, bensì, olisticamente, alla scienza nel suo complesso, di cui la filosofia (naturalisticamente) fa parte. Ma come si configura, in generale, il rapporto tra filosofia e scienza? Più precisamente, dato il contesto in cui ora ci muoviamo: come distinguerle? Non si vede come si possano individuare criteri che consentano di distinguere in particolare tra *filosofia* naturalista e non naturalista. Può nascere allora il sospetto che il naturalista classifichi come conforme alla propria prospettiva semplicemente ciò che approva, e come cattiva filosofia ciò che non approva. In realtà, alla distinzione tra filosofia naturalista e non naturalista sottostà l'idea di una filosofia che sia, nello stesso tempo, saldata in modo continuo alla pratica scientifica e distinta dalla restante filosofia non naturalista. La questione, allora, diventa quella di individuare la forma che potrebbe assumere tale filosofia, e di determinare se può esistere qualcosa che risponda ai requisiti individuati. Se consideriamo, per esempio, il caso del meccanicismo, è possibile distinguere tra il suo aspetto scientifico e quello filosofico: il primo aspetto si esaurisce in un insieme, sia pure quanto vogliamo strutturato, di risultati della fisica che vanno nella direzione di una rappresentazione del mondo come organizzato secondo rapporti causali di tipo meccanico, il cui paradigma sono gli urti tra particelle; il secondo aspetto è una visione del mondo che "chiude" e completa il quadro di risultati fisici suddetti, negando la possibilità stessa di fenomeni non spiegabili meccanicamente. Sembra che il primo meccanicismo sia semplicemente *scienza*, e che il secondo sia semplicemente *filosofia*: non sembra esserci spazio per un meccanicismo che sia filosofico, e quindi vada oltre la scienza, senza essere staccato dalla pratica scientifica.

2. Conseguenze metodologiche

Comunque, le due domande a cui il naturalismo insiemistico intende rispondere sono le seguenti: le questioni indipendenti sono questioni matematiche legittime? In caso affermativo, come rispondervi, e con quali giustificazioni? Il punto di vista che viene assunto coerentemente da Maddy (si vedano Maddy 1996 e 2011) può essere sintetizzato dicendo che la risposta alla prima domanda è senz'altro positiva, e che alla seconda si risponde che la giustificazione delle soluzioni proposte per le questioni indipendenti è esclusivamente *interna* alla matematica, sebbene considerazioni filosofiche extra-matematiche abbiano un ruolo fondamentale di ispirazione. Proviamo allora a immaginare un giudice imparziale che deve scegliere, seguendo criteri naturalistici, tra diverse proposte di rafforzamento della teoria di base ZFC mediante nuove ipotesi. Al di là dell'attività dimostrativa che avviene in una grande "teoria centrale" che include non solo le teorie matematiche ma anche tutti i risultati metamatematici disponibili, ci sarebbe una "penombra" di meta-considerazioni, che *non* sarebbero metamatematiche, ma sfuggirebbero alla stessa dicotomia tra teoria e metateoria. Nel caso della teoria degli insiemi, i rapporti tra teoria e metateoria sono tutt'altro che lineari, come abbiamo visto sopra; ma anche la distinzione tra "teoria centrale" e "penombra" può essere intesa in due modi: da una parte ci si può riferire alla riflessione del matematico sui suoi risultati, alla valutazione informale di quale strada prendere per dimostrare un certo risultato, al confronto dei pro e dei contro di una certa ipotesi; questa "penombra" c'è senz'altro, e ha un ruolo fondamentale; sembra però che Maddy faccia intervenire un altro senso della distinzione: al di là di tutti i risultati matematici disponibili, compresi quelli metamatematici, ci sarebbe una sfera diversa in cui il giudice imparziale prende decisioni, ad esempio su quali nuovi assiomi adottare. Ora, sembra che si diano solo due possibilità: o la penombra è una sfera di attività *filosofica*, o è una sfera di attività *scientifica*: nel primo caso dovremmo rinunciare alla prospettiva naturalista, dato che la scelta tra ipotesi incompatibili avverrebbe sulla base di argomentazioni filosofiche, il che è proprio quello che il naturalismo vuole evitare; nel secondo caso è difficile capire che cosa significhi una attività scientifica non metateorica, specialmente nel caso della teoria degli insiemi. Tutto ciò che si può stabilire nella "penombra", se è davvero matematica e non filosofia, può in qualche modo essere formalizzato, anche se in modi che al momento possono non essere evidenti; in secondo luogo, ogni considerazione metateorica non può essere altro che insiemistica, e quindi tutto ciò che sappiamo, a qualsiasi livello, è già codificato nella "teoria centrale" o in sue possibili estensioni formali; infine, il teorema di completezza garantisce che qualsiasi ragionamento su strutture insiemistiche ha un corrispettivo formale in una teoria del primo ordine. Certo, qualcuno potrebbe obiettare che non tutto è formalizzabile, che non tutto è codificabile, che c'è un'essenziale trascendenza delle considerazioni metateoriche in senso forte riguardanti l'universo degli insiemi sulla formalizzazione; ma questa obiezione può essere sollevata solo da chi, come Gödel, abbia alle spalle una filosofia che ammetta una qualche forma di intuizione intellettuale, non certo da chi, come Maddy, vuole muoversi in una prospettiva naturalista, in cui teorie non scientifiche dell'intuizione degli oggetti matematici non possono determinare in nessun modo le decisioni del giudice imparziale.

Maddy considera un caso concreto (che seguiremo, dato che anche in casi più recenti, su altre ipotesi, i problemi in gioco sono del tutto analoghi): si chiede come si comporterà il giudice imparziale di fronte alla proposta di aggiungere alla teoria ZFC, come suo rafforzamento, l'Ipotesi di costruibilità, V=L. In particolare, come agisce il naturalismo nelle sue decisioni riguardo a V=L, e in che cosa si differenzia dal realismo? Ricordiamo che l'Ipotesi di costruibilità asserisce che l'universo V degli insiemi coincide con la classe L degli insiemi costruibili, che sono (informalmente) gli elementi della gerarchia ottenuta a partire dall'insieme vuoto prendendo a ogni stadio successore gli insiemi definibili allo stadio precedente, l'unione degli stadi precedenti agli stadi limite, e iterando la costruzione lungo l'intera classe degli ordinali (si veda ad es. ancora Jensen 1995). L'obiezione fondamentale che viene comunemente mossa contro V=L è quella della sua *restrittività*: V=L va contro uno degli obiettivi primari della teoria degli insiemi, quello di ottenere quante più strutture possibile; si tratta, per così dire, di "massimizzare" l'universo degli insiemi, ottenendo quanti più "tipi di isomorfismo" (vale a dire: classi di strutture isomorfe) possibile; questo è il principale obiettivo che deve essere rispettato, quando si prendono in considerazione possibili nuovi assiomi o ipotesi da aggiungere alla teoria ZFC per potenziarla. Per poter asserire che una teoria rispetta tale obiettivo, devono valere almeno i due requisiti seguenti: l'esistenza di un insieme che non ha una certa proprietà (nel nostro caso la costruibilità) dovrà dare *strutture* nuove, non solo nuovi oggetti; inoltre, nella nuova teoria tutti i vecchi teoremi, relativizzati a quella proprietà, dovranno essere dimostrabili. Due semplici controesempi (si veda Maddy 1996, 506): l'assioma di anti-fondazione di Aczel non rispetta il primo requisito, in quanto i "nuovi" insiemi non ben fondati che esso consente di introdurre non realizzano tipi di isomorfismo che non siano già realizzati da insiemi ben fondati; una teoria per cui esiste un ordinale maggiore di tutti i cardinali misurabili non rispetta il secondo requisito rispetto ad una teoria per cui esistono misurabili arbitrariamente grandi, in quanto non tutte le relativizzazioni dei teoremi della seconda teoria sono dimostrabili nella prima. Tra i possibili rafforzamenti della teoria ZFC che rispettano entrambi questi requisiti, consideriamo la teoria che si ottiene aggiungendo agli assiomi di ZFC l'assunzione dell'esistenza di un particolare "oggetto" la cui esistenza non può essere dimostrata in ZFC: tale oggetto è denotato dal simbolo "0#"; si tratta di un particolare insieme di numeri naturali che codifica una descrizione completa della struttura di L insieme con un'immersione elementare non banale di L in L stesso; l'esistenza di 0# equivale all'assunzione che V è diverso da L e che esiste tale immersione; si può dire che 0# sia il passo successivo oltre L (si veda ancora Jensen 1995). Più che queste due ipotesi rivali che si possono proporre per potenziare la teoria ZFC in quanto tali (V=L da una parte, l'esistenza di 0# dall'altra), occorre valutare se il naturalismo influisca realmente sulle decisioni del giudice imparziale nella scelta tra le due ipotesi.

Vediamo prima sinteticamente come si svolge l'argomentazione di Maddy; ne esamineremo in seguito i passaggi determinanti. Chi sostiene l'Ipotesi di costruibilità viene accusato di restringere in modo ingiustificato l'universo degli insiemi; a questo egli replica che nella sua teoria esistono ordinali (quindi strutture, tipi di isomorfismo) che non esistono in nessun modello transitivo della teoria rivale: egli può infatti dimostrare che in nessun modello transitivo della teoria rivale compaiono ordinali non numerabili. Quindi è la *sua* teoria a rispettare, malgrado le apparenze, i due requisiti necessari per considerare una teoria come "massimizzante". Tra l'accusa e la contro-argomentazione risalta subito una prima differenza: nella contro-argomentazione si usano risultati metamatematici sui modelli, e in generale (secondo Maddy) non è così chiaro quali conclusioni trarre da tali risultati. Più precisamente, se si adotta V=L nella "teoria centrale", e si porta la stessa ipotesi nella "penombra", non ha senso usarla per dimostrare qualcosa sulla semantica dell'ipotesi rivale, come viene fatto dal contro-argomentatore: a quel punto, *già* si sa che l'ipotesi rivale è semplicemente *falsa*. Più in generale, ogni informazione sulla possibile reinterpretazione della controparte formale del "linguaggio centrale" usato dal giudice imparziale è irrilevante riguardo alla *effettiva* semantica di esso. Il sostenitore di V=L, in realtà, vuole semplicemente mostrare che cosa succede se l'ipotesi di costruibilità è *vera*: *in tal caso* l'universo del suo oppositore è davvero un modello "impoverito". Ci si chiede allora quale sia la differenza, lo scarto *metodologico* tra le due posizioni, da un punto di vista naturalistico. La risposta è che il contro-argomentatore, sostenitore di V=L, usa sia una nozione di verità che non è quella abituale in matematica (quella di Tarski), ma è invece extra-matematica, sia una nozione di riferimento altrettanto extra-matematica, secondo cui i quantificatori variano su di un preesistente universo di insiemi che rende vera la teoria. Ma considerazioni extra-matematiche non sono ammesse dalla metodologia naturalistica. L'argomento del sostenitore di V=L, apparentemente tecnico, poggia su pesanti premesse extra-matematiche; ora, la principale conseguenza dell'adozione del naturalismo, che lo differenzia nettamente dal realismo, è proprio che argomenti apparentemente tecnici, in realtà filosofici, non hanno forza metodologica; pertanto, conclude Maddy, il giudice *rifiuterà* l'argomento del sostenitore dell'Ipotesi di costruibilità. Si sarebbe mostrato in questo modo, come si desiderava, che il naturalismo ha un ruolo determinante nelle decisioni del giudice imparziale.

Questa lunga argomentazione costituisce il nucleo della caratterizzazione e della difesa della prospettiva naturalistica da parte di Maddy in questo contesto; ma proprio nei passaggi decisivi dell'argomentazione emergono le caratteristiche peculiari del naturalismo insiemistico e la sua debolezza. Prendiamo il passo seguente:

> Dopotutto, la teoria di Tarski [la teoria semantica della verità per i linguaggi formali] si applica a linguaggi interpretati, e il linguaggio centrale del giudice è un linguaggio interpretato; per lui, "per ogni" significa "per ogni insieme in V" o "per qualunque insieme che compare in qualche V_α". Informazioni su possibili reinterpretazioni della controparte formale del linguaggio centrale sono irrilevanti per la sua effettiva [reale] semantica (Maddy 1996, 508).

È proprio il sostenitore dell'ipotesi di costruibilità, V=L, a far entrare in gioco le possibili reinterpretazioni della controparte formale del "linguaggio centrale" del giudice; a partire dalla non naturalezza di questa posizione Maddy argomenta che, in realtà, il sostenitore di

V=L *non* vuole mostrare le conseguenze di possibili reinterpretazioni, quanto piuttosto le conseguenze dell'assunzione che V=L sia *vera*. Una volta attribuite queste intenzioni al sostenitore di V=L, Maddy gli rimprovera l'uso di una nozione di verità extra-matematica, in ultima analisi *metafisica*, che risulta inaccettabile naturalisticamente. Non crediamo che si possa accusare questa argomentazione di Maddy di essere scorretta; quello che però la rende *irrilevante* ai fini della difesa del naturalismo "intra-matematico" è il fatto che assume proprio ciò che rimprovera al suo avversario realista "filosofico". Come può, infatti, il giudice *imparziale*, che sta valutando se ammettere o meno l'ipotesi di costruibilità, interpretare tranquillamente i quantificatori universali del proprio linguaggio come "per ogni insieme in V", se ciò che è in questione è se V sia L o meno? In altre parole, si pone il seguente dilemma: o "V" denota semplicemente la classe degli oggetti di un qualunque modello della teoria degli insiemi che soddisfano la formula "$x=x$" (o una qualunque formula soddisfatta da tutti gli oggetti del dominio del modello), e allora dire che "per ogni" significa "per ogni insieme in V" è banale; oppure, V si contrappone a L come universo "ricco" di fronte ad un universo "povero", e allora dire ciò è prematuro. Ma una domanda più radicale emerge di fronte al passo sopra citato: che cosa può mai essere la semantica effettiva del giudice imparziale, se deve restare impregiudicata l'Ipotesi di costruibilità? Anche ammesso che esista una semantica *intuitiva* della teoria degli insiemi (vedi sopra), come potrebbe essere rilevante per l'argomento che stiamo esaminando? Una risposta potrebbe esserci, ma solo andando in direzione opposta a quella del naturalismo: una semantica intuitiva sarebbe rilevante, qui, solo nel caso in cui si accettasse un realismo di tipo gödeliano, ammettendo un universo di insiemi ben definito indipendente dalla nostra conoscenza e attingibile mediante un'intuizione non sensibile. In tal caso potremmo considerare la semantica effettiva come la semantica di un matematico che avesse accesso diretto a questo universo degli insiemi. Non c'è bisogno di dire quanto ci allontaneremmo in questo modo dal naturalismo, che Maddy vuole assumere. L'argomentazione a sostegno del naturalismo, una volta sviluppata anche indagando i suoi presupposti, mostra quindi di essere sostenibile solo a patto di assumere una qualche forma di quello stesso realismo gödeliano che viene rifiutato. In realtà, la stessa

Maddy si rende conto che il sostenitore dell'Ipotesi di costruibilità, più che "giocare" semplicemente sulle possibili reinterpretazioni della controparte formale del "linguaggio centrale" del giudice imparziale, prende una posizione ben definita su che cosa si debba considerare il dominio dei quantificatori della teoria degli insiemi: egli vuole asserire che gli insiemi *sono* gli insiemi costruibili, che V=L è *vera*. Non si riesce però a comprendere come Maddy possa accusare per questo il sostenitore di V=L di usare pesantemente considerazioni extra-matematiche, tali che il giudice deve scartarle in base ai suoi principi naturalistici; e soprattutto come possa considerarlo come l'elemento decisivo che *distingue* le due posizioni rivali, pro o contro V=L. In quale senso il sostenitore della negazione di V=L non cade sotto le accuse che colpiscono il suo rivale? Bisognerebbe sostenere che egli non vuole asserire che esistono insiemi non costruibili e che V=L è falsa; sarebbe sufficiente mostrare che comunque la sua nozione di verità non è extra-matematica. Come questo possa essere fatto non è assolutamente chiaro. O *entrambi* i rivali assumono *un* modello, e una nozione di verità "forte" ("extra-matematica") rispetto a quel modello, di cui postulano una sorta di "intoccabilità" da parte di tutti i fenomeni di "relatività" e non univocità messi in luce dai risultati metamatematici, modello che in un caso è V realisticamente inteso, nell'altro L; oppure *entrambi* non lo assumono, e allora cadono non solo le accuse mosse al sostenitore di V=L, ma anche ogni possibile caratterizzazione dell'universo degli insiemi che prescinda da considerazioni metamatematiche o pretenda di fondarle in qualcosa che le precede e ne rimane per così dire "incorrotto". In particolare, non è corretto contrapporre il rivale dell'Ipotesi di costruibilità all'altro dicendo che mentre il primo mostra semplicemente quali risultati seguono dalla sua ipotesi l'altro invece mostra (in modo involuto) che cosa consegue dall'adozione della propria ipotesi per il modello del suo oppositore. Non è corretto perché entrambi mostrano semplicemente quello che consegue dalla propria ipotesi, e quello che ne consegue è inestricabilmente matematico e metamatematico. A meno che ancora una volta uno dei due non abbia un accesso privilegiato *al* modello, nel qual caso avremmo certo un'asimmetria, ma non nel tipo di argomentazioni, bensì soltanto nella *verità* delle assunzioni, e ci ritroveremmo comunque in pieno realismo non naturalistico. Ciascuno dei due contendenti ricava dalla propria ipotesi conseguenze sui modelli dell'altro che li rendono a dir poco contro-intuitivi; non si vede come sia possibile usare queste conseguenze per mostrare una decisiva differenza tra le due proposte, né soprattutto come attribuire su queste basi ad uno solo dei due un concetto "metafisico", extra-matematico di verità.

3. Qualche considerazione critica

Conviene infine esplicitare alcuni aspetti del naturalismo insiemistico che sono rimasti finora sullo sfondo come assunzioni filosofiche di base. Consideriamo a questo scopo in particolare l'obiettivo della "massimizzazione" dell'universo degli insiemi, obiettivo che entra in gioco nell'argomentazione ora discussa. Uno degli scopi della ricerca matematica è di essere di utilità alle scienze, attraverso l'elaborazione di strutture astratte che intervengono in maniera decisiva, *costitutiva*, nell'elaborazione concettuale interna alle scienze stesse; ora, è indubbio che le teorie che "massimizzano" l'universo degli insiemi sono migliori nel produrre strutture. Questo è un argomento ben diverso dagli argomenti di indispensabilità, e non sembra soffrire degli stessi difetti; in particolare, è intra-matematico. Il naturalismo rifiuta, contro il realismo, la rilevanza metodologica del fatto che le proprietà che riteniamo desiderabili possano essere disgiunte *in realtà* dalla verità della teoria, e in questo senso esso si avvicina entro certi limiti alla posizione di chi ritiene che, pur non esistendo fatti che rendono veri o falsi gli enunciati indipendenti dalla teoria ZFC, l'estensione di essa con nuovi assiomi non sia arbitraria; non è assimilabile alla posizione di chi ammette la possibile separazione di verità e desiderabilità.

Resta il problema di conciliare quelle che sembrano due massime metodologiche in contrasto: da una parte, avere *una sola* teoria degli insiemi, in una parola *unificare*; dall'altra, avere quante più strutture possibili, in una parola *massimizzare*. Se, come Maddy, si considera la teoria degli insiemi come la suprema corte ontologica dell'intera matematica, allora l'esigenza di unicità sembra irrinunciabile: il matematico non vuole sentirsi dire che ci sono modelli in cui succede questo e altri in cui succede quest'altro; vuole assunzioni abbastanza forti per i suoi scopi. È vero che finora le due massime sono state insieme, nel senso preciso che le ipotesi di grandi cardinali tendono a gerarchizzarsi secondo un ordine *lineare* dal punto di vista della loro "forza" (nel senso tecnico di *consistency strength*), e che le teorie restrittive, come quella che assume V=L, hanno naturali modelli *interni* (su questi punti si veda ancora Jensen 1995); ma questo non garantisce nulla per il futuro. Così Maddy conclude sdrammatizzando l'affermazione che l'Ipotesi del continuo potrebbe essere inerentemente indecidibile, interpretandola come un semplice richiamo alla possibilità che diventi ragionevole mettere da parte l'obiettivo di un'unica teoria degli insiemi, in favore di quello di poter disporre della massima varietà possibile di strutture. Ma in che senso la teoria degli insiemi è la suprema corte ontologica della matematica? Se si vuol dire che esistono ricerche su quali ipotesi insiemistiche è necessario di volta in volta assumere per dimostrare risultati matematici "puri", non legati alla ricerca logico-matematica, non si può che essere d'accordo; se invece si vuol dire che l'orizzonte ultimo della matematica è dato una volta per tutte e coincide con la teoria degli insiemi, allora non riusciamo a capire a cosa ci si riferisca: la storia stessa della matematica (se vogliamo, sin dalla scoperta dell'irrazionale) è una smentita continua, una continua dissoluzione dell'idea stessa di "suprema corte ontologica". Il problema non è che la teoria degli insiemi sia inadeguata; il problema è che il matematico stesso elabora strutture, riflette, assiomatizza, cerca nuove ipotesi, nella massima *libertà* (vedi sopra), senza dover rispondere a corti ontologiche; con questo non si esclude né la *non* arbitrarietà del modo di procedere (anche a livello euristico) dei matematici, né la sensazione che essi hanno talvolta di essere *costretti* a prendere certe strade e non altre, né la rilevanza di una discussione metodologico-critica genuinamente filosofica; è curioso che sia proprio una sostenitrice del naturalismo come Maddy a parlare di supreme corti ontologiche, attribuendo alla teoria degli insiemi ruoli "metafisici" che non ha e non vuole avere. È dubbia, poi, la caratterizzazione del matematico come colui che non vuole sentirsi dire che nei vari modelli avvengono cose diverse, ma che vuole sapere "come stanno le cose". Un aspetto non trascurabile della ricerca matematica è che nel suo progredire essa mostra in modo preciso come alcune domande che sembravano sensate in realtà non lo sono; ma anche ammesso che i matematici siano davvero come li raffigura Maddy, non sembra che evitare di esaminare criticamente queste loro pretese sia la via metodologicamente corretta; ci si può chiedere quali siano, a questo punto, i confini tra metodologia naturalistica e semplice accettazione passiva delle riflessioni dei matematici sulla propria attività (un rischio che ritorna, a nostro parere, anche in Maddy 2011). Inoltre, non è scontato che se la teoria degli insiemi deve fornire un contesto ontologico per l'intera matematica allora la teoria debba essere una sola: potremmo avere varie teorie, più o meno fondamentali a seconda della capacità dell'una di definire i concetti dell'altra; o piuttosto, potremmo avere varie alternative che ci consentirebbero di articolare certe teorie matematiche e non altre, e nondimeno sarebbe pur sempre la teoria degli insiemi a costituire il quadro di riferimento, non nel senso banale che la teoria ZFC rimarrebbe come nucleo comune, ma nel senso che sarebbero proprio le diverse teorie a consentire una ricostruzione flessibile, pur sempre nell'ambito dei *metodi insiemistici* (alcune recenti, influenti posizioni di "pluralismo insiemistico" sembrano andare in questa direzione). D'altra parte, è giusto ammettere che dietro la "massima" di unificazione c'è un'esigenza che non si può disconoscere: proprio il carattere fondamentale e universale dei concetti della teoria degli insiemi (concetti come quelli di insieme, di appartenenza, di relazione), che rende possibile ricostruire al suo interno strutture matematiche molto diverse, aventi spesso proprietà mutuamente esclusive (ad esempio, le varie strutture algebriche), sembra togliere all'idea di "ramificazione" della teoria quella naturalezza che invece sembra connessa tipicamente, in altri campi, alla matematizzazione. Ma questo fa pensare che l'ordine delle idee debba essere rovesciato rispetto a come di solito viene presentato: ammesso che al presente la teoria degli insiemi si possa considerare unitaria e unica, non sarebbe l'unicità a mostrare che la teoria è il fondamento ultimo, quanto piuttosto i *desiderata* della fondamentalità, della universalità e della onnicomprensività ad esigere una teoria unica e unitaria. Ci si può chiedere anche se unificazione e massimizzazione siano davvero in conflitto: finora, guardando lo sviluppo della teoria, abbiamo tutte le ragioni per pensare il contrario; ma non sembra che questo debba essere considerato una sorta di miracolo: potrebbe corrispondere alla natura stessa di quel particolare genere di astrazione che si esprime negli assiomi della teoria stessa. Ogni valutazione di questo problema, comunque, deve tenere ben distinta una eventuale "ramificazione" della teoria resa necessaria dall'esigenza di "massimizzare", da tutte le questioni riguardanti la pluralità dei possibili modelli della teoria stessa, le quali non sono legate in modo particolare alle possibili conseguenze future di tale esigenza, ma hanno tutta la loro forza già al presente. Infine, l'ammissione della possibilità di disgiungere gli obiettivi di "unificare" e di "massimizzare" dà la misura di quanto la posizione di Maddy si allontani dalle tipiche forme di realismo platonista in filosofia della matematica: Gödel avrebbe visto quanto meno con sospetto le ammissioni della nostra autrice. Ma allora ci si chiede perché a tanta tolleranza per quanto riguarda l'Ipotesi del continuo non corrisponda un atteggiamento analogo nei riguardi di altre questioni indipendenti: è vero che l'Ipotesi del continuo è stata finora recalcitrante a ogni decisione "naturale" (pur con tutti i progressi, anche molto recenti) e quindi possiamo considerare la differenza di atteggiamento nei confronti delle varie questioni indipendenti da parte di Maddy come un'applicazione coerente del suo naturalismo; sembra tuttavia che, al di là di queste concessioni, Maddy sia sempre legata all'ideale dell'unicità della teoria degli insiemi, tanto che la possibile scissione tra gli obiettivi di "massimizzare" e "unificare" è presentata come una remota eventualità, e non si prende neppure in considerazione l'idea che essa possa essere già prospettata dai risultati attualmente noti.

In conclusione, crediamo che quando si vuole contrapporre a una cattiva metodologia, di stampo filosofico, una metodologia sana, di stampo scientifico, che non esce dalla matematica stessa, bisogna essere cauti: non tutte le argomentazioni che si vogliono respingere sono cattiva filosofia extra-matematica, e d'altra parte non tutte quelle che si vogliono accogliere sono buona metodologia intra-matematica; è dubbio che sia possibile risolvere le questioni metodologiche della teoria degli insiemi sempre e comunque con considerazioni non filosofiche, puramente "scientifiche". Più in generale, quando le questioni epistemologiche e metodologiche non sono impostate risalendo alle condizioni di possibilità della matematica a partire dal *fatto* della matematica stessa, bensì imponendo dall'esterno posizioni epistemologiche pregiudiziali (e proprio il naturalismo pare paradossalmente, in questo senso, qualcosa di pregiudiziale, malgrado le sue intenzioni), ci si preclude in partenza la possibilità di comprensione di certi aspetti importanti della conoscenza matematica. Dal rifiuto naturalistico di una riflessione propriamente filosofica distinta dalla scienza pare così che non segua il rispetto del lavoro di chi fa scienza, quanto piuttosto la sovrapposizione acritica ad esso di posizioni filosofiche che non si presentano neanche come tali.

Capitolo Quinto
Altre prospettive

1. Una prospettiva concettualista

Alla luce delle difficoltà che abbiamo mostrato riguardo a certe forme di realismo in filosofia della matematica, si è naturalmente portati a prendere in esame alternative *concettualiste*, nel senso di posizioni che considerano i concetti matematici (in un'accezione che deve essere specificata, comunque in quanto espressi da predicati) come primari rispetto agli oggetti matematici. Spesso le obiezioni al realismo hanno in effetti un innegabile sapore concettualista: ad esempio, Jonathan Lear esprimeva nel suo importante saggio (già ricordato in precedenza) *Sets and Semantics* (Lear 1977) proprio l'esigenza di una filosofia concettualista della matematica, più attenta alle questioni epistemologiche che a quelle ontologiche, una filosofia in cui si potesse addirittura fare a meno della nozione di oggetto matematico. Pensiamo qui a una forma di concettualismo che riesca ad evitare di porre restrizioni di natura predicativista o costruttivista, accettando la teoria degli insiemi classica, con le sue estensioni assiomatiche, così come viene comunemente formulata e sviluppata. A questo proposito, Lear faceva riferimento ad un altro importante lavoro, ovvero *Myth and Mathematics* di Leslie Tharp (pubblicato postumo: Tharp 1989). Proviamo ora ad esplorare alcune delle conseguenze di questo tipo di concettualismo; il problema di fondo è sempre la caratterizzazione dei concetti matematici, e abbiamo già discusso sopra quella sorta di terza via neokantiana tra realismo e concettualismo per cui si assume una nozione di concetto matematico secondo la quale tali concetti non sussistono come sostanze ontologicamente date, né come costrutti mentali o linguistici, ma come qualcosa che per sua natura si colloca su un piano autonomo di pura validità.

La proposta di Tharp (1989) che ora discuteremo brevemente è forse l'unica recente in direzione del concettualismo che si pone l'obiettivo di non porre alcuna restrizione sull'attuale pratica matematica, ma al contrario di prendere esplicitamente in considerazione anche la teoria degli insiemi più elevata in tutta la sua forza, senza proporne riformulazioni o modifiche. Sin dall'inizio, Tharp dichiara di intendere i concetti come umanamente afferrabili, implicando "criteri umanamente comprensibili" (Tharp 1989, 167). Proprio questa prima caratterizzazione dei concetti, apparentemente accettabile, è interpretabile in due modi radicalmente diversi, e l'interpretazione che si sceglie è un buon sintomo dell'atteggiamento filosofico generale che si andrà ad assumere nei confronti del concettualismo. La parola chiave è "umanamente". In una prima lettura si tratta dell'uomo in quanto essere naturale, non preso ovviamente isolatamente, solipsisticamente, ma piuttosto come comunità. Ciò implica che i concetti siano qualcosa che ha a che fare primariamente con la mente (qualunque cosa essa sia), con la vita mentale delle persone che fanno parte del nostro mondo fisico. Ciò, in un certo senso, naturalizza l'intera questione e sottopone lo studio dei concetti matematici e la spiegazione del modo in cui essi costituiscono le teorie matematiche allo studio della mente, nel senso più generale. Pertanto, il problema della natura dei concetti matematici diventa un sottoproblema di una questione molto più generale: come riescono gli esseri umani a sviluppare, a utilizzare con successo e ad arricchire progressivamente il proprio patrimonio concettuale? Ma vediamo ora la seconda lettura della parola "umanamente". Nella seconda lettura, il punto chiave non è l'attività mentale degli umani; si tratta piuttosto della struttura complessa delle teorie che essi elaborano nel corso della loro attività matematica. Qui le teorie sono qualcosa che ha una forma di sussistenza particolare che non è necessariamente legata all'atto di pensare. Pensiamo ad una tipica teoria matematica: è qualcosa che, in certo modo, non si riduce ai pensieri dei matematici che lavorano sulla teoria. In questo senso, le teorie sono qualcosa di essenzialmente umano, ma in modo mediato: sono qualcosa a cui gli esseri umani contribuiscono, ma sono essenzialmente autonome come strutture concettuali. Però sono anche essenzialmente comprensibili, o meglio, non sono altro che le forme assunte dall'atto del comprendere, e questo è il loro essere "umanamente afferrabili". Ora, i concetti matematici sono i costituenti delle teorie matematiche e condividono la natura dell'intera struttura in cui hanno il loro posto. La differenza rispetto all'altra interpretazione è che ora ciò che accade nella mente umana è irrilevante, salvo per la psicologia; ora il fatto rilevante è semplicemente che gli esseri umani sono capaci di fare matematica, e la matematica è per sua natura qualcosa di umanamente comprensibile. Ma la matematica non è *definita* come qualcosa che avviene nella mente (o nel cervello): la matematica rimane quello che è, anche considerata indipendentemente dalla sua connessione con la cognizione, con la mente, con le attività umane in generale. Forse una delle caratteristiche più sorprendenti dei concetti matematici è il fatto che essi sono qualcosa di così eminentemente comprensibile (in linea di principio), di così eminentemente umano, e tuttavia qualcosa di completamente libero da ogni legame con qualsiasi cosa che riguardi non solo gli esseri umani, ma anche il mondo fisico in cui viviamo.

La matematica, per chi la pratica in modo creativo, è forse davvero «un vasto gioco mentale con regole ferree» (Manin 1998, 148), e questo è squisitamente umano; ma è semplicemente una conoscenza umana di qualcosa che non ha assolutamente nulla di umano nel suo contenuto, essendo di per sé del tutto indifferente all'intera sfera di ciò che esiste in generale. Questa è forse una delle idee più solide alla base delle filosofie realiste. Ciò che è discutibile nel realismo è l'interpretazione di questo elemento trascendente, non umano, nel contenuto dei concetti matematici: essi vengono ipostatizzati in un essere metafisico a tal punto che la loro stessa intelligibilità rimane offuscata, e alla fine diventa inspiegabile. La distinzione che sto operando può essere propriamente compresa, nuovamente, solo nel contesto di una filosofia neokantiana "trascendentale". Secondo tale prospettiva filosofica, il modo corretto di affrontare il problema dovrebbe essere il seguente (come abbiamo visto sopra): i concetti matematici sono umanamente comprensibili, perché non sono altro che ciò che costituisce la matematica stessa; gli esseri umani sono capaci di fare matematica, poiché ciò è fondamentalmente definito da ciò che fanno sotto questo nome; ma proprio in questa attività propriamente umana, i concetti che sorgono sono radicalmente trascendenti rispetto all'attività stessa, e non hanno di per sé alcun legame con la mente umana, non nel senso che non possano essere afferrati, ma nel senso che nulla nel loro contenuto presuppone qualcosa che abbia a che fare con la conoscenza, da un punto di vista propriamente concettuale.

Tornando al concettualismo di Tharp, è chiaro che Tharp sceglie la prima delle alternative presentate sopra: «Concluderemo [che i concetti] sono principalmente mentali» (Tharp 1989, 172). Emerge subito un'importante conseguenza di questa scelta: «Un concetto come '*x* è un insieme di numeri' viene estrapolato da concetti quotidiani come '*x* è un mucchio di sassolini' e '*x* è un gruppo di uomini'» (ibid.). Letteralmente, questo è semplicemente falso: ovviamente non c'è modo di colmare l'abisso tra il primo concetto e gli altri due. Ma è chiaro che Tharp è troppo raffinato per dire questo in un senso induttivista o milliano; forse gli interessa piuttosto sostenere che l'elemento decisivo nella spiegazione della concettualizzazione matematica è la natura del processo attraverso il quale sviluppiamo l'estrapolazione dai sassolini agli insiemi, e in questo caso la sua proposta non va interpretata come un tentativo di spiegare il primo concetto sulla base di concetti quotidiani. Riteniamo tuttavia che rimangano problemi per questa impostazione concettualista. Supponiamo che da un punto di vista storico, psicologico, antropologico Tharp abbia ragione. Come potremmo spiegare il fatto che l'estrapolazione dai sassolini agli insiemi sia sufficiente per produrre il concetto *matematico* di insieme? Questo sembra avere una natura radicalmente diversa rispetto ai concetti quotidiani: ad esempio, ha carattere normativo, è la condizione della possibilità di molti altri concetti, non ha nulla a che fare con l'esperienza; non è una questione di grado, sembra esserci davvero una differenza qualitativa. Quindi non si dovrebbe fare appello all'estrapolazione come spiegazione; piuttosto, essa è un *problema*, e non troviamo molto su questo problema nell'articolo di Tharp. Il problema dell'estrapolazione è, in ogni caso, il punto più delicato dell'intero concettualismo: se l'estrapolazione viene ricondotta ai suoi aspetti induttivi, "umani", psicologici, allora questa filosofia sembra perdere ogni possibilità di essere una filosofia della matematica; se invece l'estrapolazione è un autentico fenomeno concettuale, allora resta da spiegare la natura di questo processo e, soprattutto, i vantaggi di un tale concettualismo rispetto a una qualche forma di platonismo dei concetti.

Questo tipo di concettualismo deve anche affrontare il consueto problema delle interpretazioni intese dei sistemi formali. Tharp è piuttosto sbrigativo su questo punto: «Almeno *si intende* dare una "struttura” definita [per l’aritmetica], in modo che ogni enunciato abbia un valore di verità definito; per il momento lasciamo da parte i problemi dell’indeterminatezza» (ibid., 175). Ma questi problemi non possono essere semplicemente accantonati quando si discute la questione dei concetti matematici, perché rivelano qualcosa di essenziale e specifico di tali concetti: il fatto che i concetti matematici sono passibili delle interpretazioni più diverse. È proprio nel processo di matematizzazione, che nella sua fase più matura assume la forma dell’assiomatizzazione e infine (in linea di principio) della formalizzazione, che ciò che inizialmente era confusamente pensato come definito e univoco si rivela di solito come tutta una molteplicità di strutture, che sono molto diverse ma concettualmente profondamente correlate in quanto soddisfano gli stessi assiomi. Questo è lo sviluppo dei concetti matematici stessi; una filosofia della matematica che attribuisca il ruolo fondamentale ai concetti non dovrebbe ignorare questo fenomeno in nome di una nozione di “concetto” precedentemente assunta.

Abbiamo detto sopra che uno degli aspetti positivi dell’impostazione di Tharp, che ci interessa particolarmente, è che, a differenza delle consuete filosofie concettualiste, per esempio predicativiste, consente di prendere la teoria degli insiemi sostanzialmente alla lettera, senza reinterpretazioni o limitazioni. Ma come giustifica Tharp i consueti assiomi della teoria degli insiemi e l’“ideale regolativo” della gerarchia iterativa? «Per ogni concetto F(x) definito per i *tallies*, si deve accettare l’assioma “Esiste un insieme contenente esattamente quei *tallies* x tali che F(x)” [...]. Mi sembra anche che la costruzione verso l’alto nella gerarchia transfinita degli insiemi di Zermelo-Fraenkel sia una naturale estensione di quanto sopra» (ibid., 176). Il problema sta nel modo in cui si dà significato alla frase “definito per i *tallies*” nella prima asserzione: è possibile stabilirne a priori il significato, su base filosofica, oppure è necessario (e sufficiente) produrre una teoria assiomatica degli insiemi? Siamo propensi ad accettare la seconda ipotesi, che presenta un vantaggio decisivo: è conforme all’attuale sviluppo storico della teoria degli insiemi, uno sviluppo che non è stato guidato solo da contingenze storiche, ma è stato realmente concettuale. In ogni caso, l’Assioma di comprensione che qui Tharp presenta non è giustificato e non ci si impone, a meno che non abbiamo ragioni indipendenti per pensare che il processo di formazione degli insiemi sia dotato di significato; queste ragioni possono addirittura ridursi all'assioma stesso, ma l'assioma non può essere presentato come qualcosa che deriva direttamente da intuizioni sui *tallies*. Ma ciò che è più discutibile è la seconda affermazione di Tharp, perché se fosse corretta, non ci dovrebbe essere alcun motivo per evitare l'assioma (contraddittorio) di comprensione non ristretto. Si potrebbe ancora dire che l'assioma nella sua forma più potente non è una corretta estensione del principio precedente, ma questa obiezione mette in luce il punto cruciale: ciò che qui importa è il *criterio* adottato nell'estensione di qualunque principio che consideriamo elementare e incorporato direttamente nei nostri concetti più semplici, che sono, secondo Tharp, la base di tutto il resto in matematica. Se questo criterio non viene in qualche modo spiegato, tutta la forza del concettualismo, che consiste nel costruire ciò che è complesso su ciò che è semplice, è illusoria. Le osservazioni di Tharp sembrano esprimere la pretesa che il processo di estensione dai *tallies* agli insiemi in generale si giustifichi da sé, e che vada nel senso giusto semplicemente seguendo alcune caratteristiche interne dei concetti stessi, caratteristiche il cui potere di produrre le estensioni corrette rimane inspiegato. Quando, nelle ultime pagine del suo saggio, Tharp dice: «In questi contesti fortemente estrapolati vengono attribuite ad essi [insiemi] molte delle stesse proprietà generali attribuite a mucchi e agglomerati in contesti familiari (ma non troppe)» (ibid., 191), il vero problema viene ancora una volta liquidato con troppa facilità. Chiaramente, il problema è: *quali* proprietà? "Non troppe" non è una risposta. Altrettanto preoccupanti sono le seguenti osservazioni: «Penso che sia chiaro che il nostro senso fondamentale di nitidezza [*sharpness*] è intimamente legato ai concetti combinatori [...]. Man mano che si ascende agli infiniti superiori, lasciandosi alle spalle i familiari processi meccanici, i nostri concetti diventano gradualmente confusi [...]. L'universo della teoria degli insiemi è piuttosto oscuro e genuinamente indeterminato» (ibid., 179). A prima vista, questo sembra ragionevole, e potrebbe essere vero da un punto di vista strettamente epistemico, se prendiamo come punto di osservazione il soggetto (psicologico) che fa matematica. Ma esiste un punto di vista diverso, per cui queste affermazioni risultano lontane dalla pratica matematica. In primo luogo, si potrebbe contestare la presunta "nitidezza" dei concetti combinatori: sono indiscutibilmente nitidi in quanto esiste una combinatoria come disciplina matematica ben sviluppata; ma Tharp ha in mente qualcos'altro, e basta pensare alle famigerate difficoltà della matematica combinatoria, rispetto alla chiarezza intuitiva di gran parte della matematica dell'infinito e del continuo, per vedere la debolezza di ogni visione che pretenda di considerare chiari solo concetti di natura combinatoria. Ma il punto principale è che è semplicemente falso che ascendendo agli infiniti superiori i nostri concetti diventano confusi: il concetto (per esempio) di cardinale misurabile è perfettamente nitido, e sebbene abbiamo una conoscenza comparativamente piuttosto limitata di questo concetto, questo non ha nulla a che fare con una sua presunta sfocatezza; ovunque abbiamo una teoria matematica (e questo è il caso dei grandi cardinali) niente è vago: possiamo essere più o meno ignoranti sugli stessi concetti che abbiamo introdotto, ma questo non ha nulla a che fare con la vaghezza. Questo è un altro punto importante che può sicuramente essere concesso al realismo. Anche parlare di indeterminatezza dell'universo degli insiemi è discutibile: in un certo senso, esso è sufficientemente determinato dal punto di vista matematico, poiché è in sé tanto determinato quanto deve e può esserlo, e lo sarebbe anche nel caso in cui non ci fosse modo, in linea di principio, di decidere le questioni indipendenti come l'Ipotesi del continuo. Tharp forse qui intende semplicemente che non esiste un modo unico di procedere con estensioni assiomatiche al di sopra di ZFC, ma questo non significa che la teoria degli insiemi sia "poco chiara": la chiarezza non ha nulla a che vedere con la pluralità delle possibili estensioni assiomatiche di una teoria, e il fatto che Tharp consideri lo sviluppo delle teorie matematiche dell'infinito superiore come un'esplorazione del territorio dell'indistinto è un punto debole del suo concettualismo. È lo stesso problema che possiamo riscontrare in altre filosofie concettualiste della matematica: esse definiscono "non chiare" alcune teorie matematiche perfettamente chiare, solo perché non sono conformi a un loro criterio filosofico di chiarezza prestabilito.

Riassumendo la sua posizione, Tharp afferma che la visione complessiva del suo articolo «equivale a un'interpretazione modale della matematica» (ibid., 185), in cui le modalità matematiche sono interpretate non come se riguardassero oggetti ordinari, ma piuttosto concetti ordinari. Poi cita Parsons: «Ciò che esiste realmente in termini di iscrizioni non è sufficiente per rendere vere le proposizioni generali della teoria dei numeri [...] (Forse ciò che "esiste realmente" in termini di significati e altre intenzioni possedute dagli esseri umani rende vere le affermazioni della teoria dei numeri. Ma questa è un'altra questione)» (ibid., 187). Ciò mostra che il concettualismo ha problemi simili a quelli del modalismo in filosofia della matematica: parlare di concetti invece che di oggetti non è sufficiente per evitare questi problemi. Ma ciò che esiste "possibilmente" (in opposizione a "realmente") in termini di iscrizioni non è sufficiente o insufficiente per svolgere il ruolo qui considerato: è semplicemente irrilevante per l'intero problema, e ancora più irrilevante, se possibile, è ciò che esiste realmente in termini di intenzioni e simili. Certo, in un certo senso è vero che «l'universo della quantificazione è quasi sempre specificato da un concetto» (ibid., 189): questo potrebbe essere anche un tentativo interessante di risolvere il classico problema della quantificazione sull'universo degli insiemi, ma va inteso nel modo corretto. Usiamo i quantificatori anche quando non abbiamo alcun concetto del dominio; tuttavia, è vero che qualche concetto deve, per così dire, essere implicito in un dominio di quantificazione di una teoria, anche se l'unico modo in cui il concetto ha qualche sussistenza, nel caso peggiore, è proprio attraverso la teoria stessa e la molteplicità dei suoi modelli; ma, anche qui, i "concetti" sono qualcosa di non particolarmente "umano". Eppure, Tharp insiste sul fatto che «la matematica si basa non sul riferimento a oggetti, ma su un piccolo numero finito di concetti speciali. Questi concetti sono quasi-meccanici e costringono a determinate conclusioni in modo quasi-meccanico» (ibid., 193). Noi vorremmo intendere i concetti su cui si basa la matematica in modo che non siano né "speciali" né in "un piccolo numero finito", e anche l'accento posto sul loro "carattere quasi meccanico" pare solo un sintomo dello *psicologismo* che permane sotto questa proposta concettualista. Infatti, commentando il lavoro di Tharp, Charles Chihara sottolinea che una delle sue conseguenze notevoli è che, in senso stretto, «nessun oggetto avrebbe potuto esistere prima degli esseri umani, perché noi forniamo componenti essenziali» (ibid., 163). Che l'esistenza di esseri umani sia necessaria per l'esistenza di oggetti in generale è una conseguenza, coerentemente accettata da Tharp, di un concettualismo che ha una nozione di concetto decisamente troppo "psicologica" dal nostro punto di vista. Concludiamo, a questo proposito, limitandoci a citare un celebre passo della prima *Critica* di Kant in cui viene determinato in modo illuminante (e ben diverso) il ruolo dei concetti in matematica:

> Il vero metodo non era quello di esaminare ciò che [Talete, o uno dei padri fondatori della geometria] discerneva nella figura, o nel suo semplice concetto, e da questo, per così dire, leggere le sue proprietà; ma far emergere ciò che necessariamente era implicito nei concetti che lui stesso si era formato a priori e che aveva posto nella figura nella costruzione con cui se la presentava. Se vuole conoscere qualcosa con certezza a priori, non deve attribuire alla figura altro che ciò che segue necessariamente da ciò che egli stesso vi ha posto secondo il suo concetto (KrV, B XII).

2. Una prospettiva fenomenologica

Come esempio dell'adozione di una prospettiva *fenomenologica* nella filosofia della matematica, per saggiarne qualche possibile conseguenza, scegliamo alcune riflessioni di Kurt Gödel, che più volte abbiamo menzionato sopra, ma sempre solo come esponente del realismo platonista. Il profondo interesse di Gödel per la fenomenologia husserliana, come tecnica di chiarificazione concettuale del significato di alcune nozioni filosofiche fondamentali particolarmente rilevanti per i fondamenti della matematica, è ben noto (si vedano, ad esempio, van Atten-Kennedy 2003 e Tieszen 2011). Non potendo dare un quadro anche parzialmente compiuto di questo interesse, ci limitiamo qui a titolo esemplificativo a commentare alcune osservazioni di Gödel sulle *Ricerche logiche* di Husserl (principalmente la *Sesta ricerca*, Husserl 1901). Queste osservazioni sono state riportate da Hao Wang (1996), sulla base delle sue lunghe conversazioni con Gödel, e da Kai Hauser (2006), sulla base dell'esame di alcune note stenografiche inedite (non incluse nelle trascrizioni dei quaderni filosofici di Gödel finora pubblicati, Gödel 2019ss.). Vedremo innanzitutto alcuni esempi dell'atteggiamento generale di Gödel nei confronti della fenomenologia; ci concentreremo poi sul problema dell'intuizione degli oggetti ideali, mostrando la sua peculiare posizione idealista in filosofia della matematica. Non possiamo rendere giustizia qui alle profonde e complesse ramificazioni delle idee che emergeranno; il nostro scopo è semplicemente quello di vedere alcuni momenti salienti di questa interazione tra il principale logico e uno dei principali filosofi del secolo scorso, con il suo evidente interesse storico e filosofico, come esempio di una possibile prospettiva fenomenologica nella filosofia della matematica.

È noto che almeno a partire dal 1959 Gödel dedicò molto tempo ad uno studio approfondito delle principali opere di Husserl, sperando di trovarvi un quadro filosofico generale nel quale sviluppare le proprie idee. Wang riferisce (1996, 80) che a partire dal 1960 Gödel raccomandò a numerosi logici la trattazione dell'intuizione categoriale che si trova nella sesta ricerca logica husserliana, opera che Gödel lesse probabilmente già a metà degli anni trenta (come risulta dal suo "programma di lettura" che troviamo in Gödel 2019, I 179). Naturalmente non è questa la sede nemmeno per tentare di riassumere questa trattazione, ampia e molto complessa: ricordiamo solo che mentre l'intuizione è spesso limitata alla sola percezione sensoriale, Husserl ne estende l'ambito per comprendere una diversa forma di "datità", dove ciò che viene dato, in una sorta di atto (metaforico) del "vedere", è concettuale e non empirico, e che la sesta ricerca è il luogo in cui questo tipo di intuizione viene presentato e descritto per la prima volta (l'inizio di un resoconto che sarà approfondito e profondamente trasformato da Husserl nelle sue principali opere successive). Gödel ritiene che «le indagini fenomenologiche sulla costituzione degli oggetti matematici [siano] di fondamentale importanza per i fondamenti della matematica» (Wang 1996, 8.2.8), e pertanto considera la fenomenologia come il giusto contesto filosofico e metodologico in cui si potrebbero e si dovrebbero indagare le nozioni di base rilevanti per i fondamenti della matematica, ad esempio la nozione di insieme, con i relativi oggetti correlati, sia nel senso degli elementi che ricadono sotto i concetti, sia come correlati oggettivi astratti delle nozioni stesse. Questo processo fenomenologico dovrebbe partire dall'analisi di ciò che è dato negli atti di costituzione degli oggetti, nell'intuizione e nell'intelletto, per giungere (dopo un lungo e non banale processo di chiarificazione) alle pertinenti definizioni e formulazioni assiomatiche delle fondamenti nozioni e teorie matematiche. In questo senso, come sottolinea giustamente Hauser,

> il programma filosofico [di Gödel] di chiarimento del significato dei concetti fondamentali alla base della logica e della matematica è modellato in una certa misura sull'ideale husserliano della *filosofia come scienza rigorosa*, una *philosophia prima* auto-giustificante che si basa sull'intuizione introspettiva delle strutture a priori della coscienza che conferiscono significato [*Sinngebende*] (Hauser 2006, 550).

La fenomenologia è considerata da Gödel, piuttosto che come una teoria sistematica, come una *tecnica* per raggiungere una comprensione filosofica (ma non nel senso di verifica o spiegazione) di alcuni dei nostri assunti di base sull'oggettività, sulla verità, sull'essere, etc.

> La filosofia mira a una teoria. La fenomenologia non fornisce una teoria. In una teoria concetti e assiomi devono essere combinati, e i concetti devono essere precisi. La genetica è una teoria. Freud fornisce solo un abbozzo di una teoria in via di sviluppo; potrebbe essere presentato meglio. Marx fornisce qualcosa di meno di una teoria (Wang 1996, 9.3.10).

Quindi, più o meno fedelmente alle intenzioni di Husserl, per Gödel la fenomenologia trascendentale non è uno sviluppo cumulativo e sistematico di tesi e argomentazioni, ma piuttosto un punto di vista radicalmente nuovo, una modificazione dello sguardo dell'osservatore, attraverso cui le nozioni fondamentali dell'ontologia e dell'epistemologia (in generale e, nello specifico, applicata alla conoscenza matematica) potrebbero essere chiarite e gradualmente comprese, in un processo infinito di descrizione e di esplicitazione. Gli assunti di base sull'oggettività e le altre nozioni non sono propriamente spiegati in questo processo (poiché non c'è niente di più fondamentale a cui potrebbero essere ridotti), né sono giustificati o verificati (poiché, di nuovo, non c'è niente di più fondamentale su cui potrebbero essere fondati, o un qualsiasi criterio di verifica esterno, indipendente).

Anche se si potrebbe supporre che Gödel fosse attratto principalmente da quel tipo di realismo sugli universali (originale e piuttosto peculiare) presente nelle *Untersuchungen* husserliane (ad esempio nella seconda ricerca), alla luce del suo noto punto di vista realista riguardo agli enti astratti nella filosofia della matematica, di fatto risulta chiaro da alcune sue osservazioni inedite (vedi sotto) che egli si sentiva più vicino alla fase *trascendentale* del pensiero di Husserl. In questa fase, a partire dal primo volume delle *Ideen*, la descrizione delle strutture essenziali della coscienza viene intesa in modo significativamente diverso, molto più attento (in estrema sintesi) agli atti del soggetto trascendentale nella sua inevitabile correlazione con i contenuti della coscienza. Sono tre i punti principali sui quali Gödel prende le distanze rispetto alle *Untersuchungen*, criticandone la visione ancora limitata, senza però negare il loro ruolo fondamentale di ingresso principale (per così dire) nel metodo fenomenologico. Il primo è riportato da Hauser come segue:

> Sul retro del risguardo della copia di Gödel di *Ideen*, c'è una nota stenografica, secondo cui il mancato riconoscimento della soggettività trascendentale da parte di Husserl fu uno dei due errori cardinali delle *Ricerche logiche* (Hauser 2006, 552, n. 101),

l'altro essendo il mancato riconoscimento di Husserl, in quell'opera, del parallelismo noetico-noematico (ibid., 555, n. 115). Abbiamo qui un'affermazione molto chiara della preferenza di Gödel per la fenomenologia trascendentale come unico modo per rendere adeguatamente conto delle caratteristiche oggettive di ciò che è dato (dei concetti oggettivi di base) nell'evidenza vissuta del soggetto conoscente, inteso nel suo carattere trascendentale, in quanto contrapposto al suo carattere empirico (il "sé trascendentale", "ego", "soggettività", nelle parole di Husserl), nell'inseparabile correlazione e corrispondenza di *noema*, come lato "oggettivo" di ogni atto intenzionale e *noesi*, come lato "soggettivo". Il secondo punto riguarda l'evidenza stessa: Gödel respinge esplicitamente la tesi delle *Untersuchungen* (*Prolegomena*, par. 51) secondo cui la verità è essenzialmente l'unica precondizione per l'esperienza dell'evidenza: in una delle sue osservazioni stenografiche obietta a Husserl: «Questo è falso», aggiungendo «inoltre (1.) connessione della verità con noi, (2.) non troppa complicazione» (Gödel, s.d., 8). La verità, quindi, non è condizione sufficiente per l'evidenza: ci sono almeno due ulteriori precondizioni, la seconda delle quali non è difficile da comprendere, essendo l'accessibilità, in termini di complessità, estensione e profondità, del contenuto di quanto si rivela evidente; mentre la prima, così esposta, è più problematica e resta un po' oscura: si riferisce probabilmente alla necessità di una soggettività trascendentale rispetto alla quale l'esperienza dell'evidenza può di fatto realizzarsi, solo in certi modi e a certe condizioni, non come un'occorrenza astratta del manifestarsi "in sé". Il terzo punto riguarda il rifiuto di Husserl di quella che potrebbe essere chiamata la "conclusività apodittica" dell'evidenza, in favore di una nozione "fallibilista" di evidenza. Gödel considerava proprio l'ammissione della fallibilità come un tratto cruciale della teoria fenomenologica dell'evidenza, tratto che emerge sempre più esplicitamente solo nelle opere principali successive alle *Ricerche*, anche se forse vi si trova adombrato (si veda es. Husserl 1901, par. 45).

> In primo luogo, come la maggior parte di noi, Gödel crede che non abbiamo alcuna conoscenza o certezza assoluta e che né la conoscenza a priori né l'intuizione siano infallibili. Credo che sia auspicabile dare per scontato questo riconoscimento della fallibilità nell'interpretare le sue opinioni. Diceva, per esempio […] che era contento di vedere che anche Husserl riconosceva la possibilità di errore (Wang 1996, 302).

L'evidenza, da questo punto di vista, è intrinsecamente passibile di perfezionamento, nel senso che in ogni fase è imperfetta e può essere ulteriormente migliorata, modificata, persino cancellata in alcuni casi, proprio attraverso ulteriore evidenza, in un processo infinito, graduale, aperto, che non è mai finito e tuttavia per niente arbitrario, essendo governato da proprie leggi intrinseche, corrispondenti (in una sorta di parallelismo, all'interno della correlazione dell'intenzionalità) alle leggi del soggetto trascendentale che fa esperienza dell'evidenza stessa.

Tutto questo, secondo Gödel, ha importanti conseguenze per la descrizione fenomenologica della conoscenza matematica: definizioni e assiomi, in particolare (ma non solo) nella teoria assiomatica degli insiemi, con il suo ruolo fondazionale, sono in un certo senso dettati dall'analisi concettuale, fenomenologicamente orientata, di certe nozioni date oggettivamente, in questo caso il concetto basilare di insieme; un'analisi che si fonda sull'evidenza, ma che non ha alcun punto finale naturale, ed è essenzialmente *in fieri*, essendo basata su un'evidenza fallibile. Questo processo si svolge dalle prime formulazioni cantoriane di alcuni tratti cruciali della nozione generale di insieme infinito (dove gli insiemi sono concettualmente distinti dalle proprietà), all'emergere delle antinomie (un esempio di "elusione delle anticipazioni", in gergo fenomenologico), alle assiomatizzazioni classiche (di Zermelo, von Neumann e altri), alla necessità di estensioni assiomatiche (grandi cardinali e altre ipotesi forti) per affrontare le questioni indipendenti, estensioni che dovrebbero essere il risultato, secondo Gödel, di una più raffinata analisi del concetto di insieme, capace di portare ad ulteriori evidenze.

Secondo Wang, Gödel considerava le *Idee* e le *Meditazioni cartesiane* le più significative tra le opere pubblicate da Husserl, quest'ultima addirittura «la più vicina alla fenomenologia reale – in quanto indaga il modo in cui arriviamo all'idea del sé» (Wang 1996, 5.3). Wang fornisce la sua testimonianza di una delle migliori valutazioni complessive di Gödel sulla fenomenologia, la seguente:

> Quello di Husserl è un metodo molto importante di ingresso nella filosofia, per arrivare finalmente a una metafisica. La fenomenologia trascendentale, con l'*epoché* come metodologia, è l'indagine (prescindendo dalla conoscenza di fatti scientifici) del processo cognitivo, in modo da scoprire ciò che appare realmente essere – per trovare i concetti oggettivi (Wang 1996, 5.3.6).

In effetti, questo passo potrebbe essere preso come una perfetta sintesi dell'atteggiamento e delle aspettative di Gödel rispetto alla fenomenologia: in primo luogo, si tratta di un metodo, piuttosto che di una teoria; in secondo luogo, fornisce una via sicura per entrare nella filosofia rigorosa in senso proprio, qualcosa che non è mai finito ma, finalmente, sulla strada giusta; in terzo luogo, lo scopo ultimo è quello di sviluppare una sorta di metafisica, qualcosa di certamente diverso dalle dottrine metafisiche tradizionali, ma molto lontano dalle filosofie antimetafisiche che Gödel vedeva intorno a sé nel suo tempo (si veda Gödel 1961); inoltre, è essenzialmente trascendentale e ha come metodo l'*epoché* (come riduzione fenomenologica: "mettere il mondo tra parentesi"); essa indaga il processo cognitivo rifiutandone ogni riduzione naturalistica (in questo senso la conoscenza dei fatti scientifici è irrilevante); lo scopo dell'indagine è ciò che "realmente appare", vale a dire ciò che è manifesto, prima e al di là di ogni "spiegazione" filosofica o scientifica; infine, ciò che dovrebbe apparire e darsi in questa rivelazione graduale e mai conclusa non sono altro che i concetti oggettivi.

Concentrandoci ora sugli aspetti idealistici del pensiero di Gödel, che talvolta hanno sconcertato i suoi lettori di formazione filosofica, a causa della sua ben nota forma peculiare di realismo platonista in filosofia della matematica, notiamo che essi possono essere spiegati proprio per mezzo di un'interpretazione sulla base della fenomenologia trascendentale; questo è possibile solo tenendo conto della distanza, esplicitamente segnalata da Husserl, della fenomenologia da alcune tipiche filosofie idealiste (per una valutazione più approfondita dell'idealismo di Gödel rispetto alla fenomenologia rimandiamo comunque a van Atten-Kennedy 2003 e Tieszen 2011). Gödel è solitamente considerato un tipico esponente di una filosofia della matematica realista, più specificatamente platonista, sulla base di molte osservazioni che si possono trovare nei suoi scritti, sia pubblicati in vita che postumi – di fatto, come uno dei principali platonisti del secolo scorso (come abbiamo visto in precedenza). Non è questo il luogo per ripetere queste osservazioni, ben note e ampiamente commentate, ma solo per ricordare che nella tradizione analitica della filosofia della matematica, alla quale gran parte di coloro che le hanno discusse appartengono, il realismo matematico (in qualsiasi forma) si oppone all'idealismo (in ogni senso ragionevole). È quindi sorprendente, dal punto di vista di quella tradizione, vedere che Gödel considerava senza problemi ed esplicitamente il suo punto di vista come vicino piuttosto ad impostazioni idealiste. La sorpresa è comprensibile e deriva dall'implicita identificazione dell'idealismo con certe dottrine idealiste storiche, ad esempio forme di idealismo soggettivo berkeliano, o di idealismo trascendentale kantiano, o di idealismo classico tedesco (hegeliano o altro), senza tener conto di altre visioni filosofiche, in particolare della stessa fenomenologia. Gödel, che si formò non solo matematicamente ma anche filosoficamente nella Vienna degli anni '20, e fu sempre informato, e poi ebbe una conoscenza approfondita, di tutte le principali forme di idealismo, era ben consapevole non solo del forte elemento *oggettivista* presente in esse nella maggior parte dei casi, ma anche delle loro profonde differenze. Questo lo ha portato ad apprezzare la fenomenologia trascendentale come la posizione più vicina e più adatta a soddisfare le esigenze sottese (più o meno consapevolmente) alle consuete epistemologie realiste, in particolare in riferimento alla conoscenza matematica, con la sua posizione unica, in un certo senso addirittura isolata, nel panorama epistemologico. A questo proposito, Husserl sottolineava nell'introduzione alla seconda ricerca logica che l'idealismo non va inteso come una dottrina metafisica, ma piuttosto come l'unica possibilità di un'epistemologia coerente:

> Parlare di "idealismo" non significa ovviamente parlare di una dottrina metafisica, ma di una teoria della conoscenza che riconosce l'*ideale* come condizione per la possibilità della conoscenza oggettiva in generale, e non lo dissolve interpretandolo in senso psicologistico (Husserl 1901, Vol. 2, Parte I, 108).

Con approvazione, Gödel aggiunge, nelle sue note inedite sulle *Ricerche logiche*, con parole simili, che «gli oggetti ideali sono la precondizione per la possibilità della conoscenza oggettiva» (Gödel, s.d., 2). In questo senso, gli oggetti *ideali* sono compatibili, anzi necessari, per una spiegazione *realista* complessiva della conoscenza oggettiva in generale, e a maggior ragione per una spiegazione della possibilità di quella particolare conoscenza oggettiva di entità astratte che si dà in matematica.

Gödel considerava la fenomenologia anche come un ulteriore sviluppo sistematico della filosofia di Kant, capace di migliorare quest'ultima in un senso «che, esattamente come inteso da Kant, evita lo stesso *salto mortale* [in italiano nel testo originale] dell'idealismo in una nuova metafisica così come il rifiuto positivistico di ogni metafisica» (Gödel 1961, 384). Tralasciando ora il problema non banale di giustificare, storicamente e teoricamente, questa visione della fenomenologia come un miglioramento rispetto alla filosofia critica di Kant, ricordiamo semplicemente che fu Husserl stesso (si veda ad esempio Husserl 1901, 200) a considerare per primo la sua estensione dell'intuizione agli oggetti ideali come un miglioramento rispetto all'epistemologia kantiana. D'altra parte, va ricordato a questo proposito che Gödel considerava la fenomenologia anche come uno sviluppo di alcune indicazioni e progetti leibniziani. Ciò pone nuovamente un problema, non solo rispetto alla fenomenologia, ma anche (più seriamente) in considerazione delle ben note differenze radicali tra la tradizione leibniziana e quella kantiana (meno radicali, è vero, nel caso del neokantismo marburghese) sul problema del rapporto tra intuizione e intelletto. Ma Gödel era meno interessato a queste distinzioni che all'identificazione della fenomenologia, e anzi della sua propria visione originale, con una sorta di monadologia trascendentale pienamente sviluppata, qualcosa di simile a quanto emerge nell'ultima delle *Meditazioni cartesiane* di Husserl.

Come esempio di base ma importante dell'estensione fenomenologica dell'ambito dell'intuizione, proprio al centro degli interessi di Gödel, si può considerare l'intuizione intellettuale degli oggetti della teoria degli insiemi (cui accennavamo sopra). Si tratta di un caso paradigmatico della situazione in cui, secondo le parole di Husserl, «la sfera della "sensibilità" è stata lasciata e si è entrati in quella dell'"intelletto"» (Husserl 1901, par. 47). Gödel riteneva che la teoria assiomatica degli insiemi dovesse essere sviluppata esplicitando negli assiomi le caratteristiche del concetto di insieme: non solo nel senso che le attuali assiomatizzazioni esprimono di fatto le proprietà fondamentali degli insiemi, ma anche che i nuovi assiomi, che è necessario introdurre allo scopo di risolvere le questioni indipendenti, dovrebbero essere scelti non in modo arbitrario, o convenzionale, o principalmente in considerazione delle loro conseguenze, ma in primo luogo guardando al concetto oggettivo e ben determinato di insieme, dato in una sorta di intuizione intellettuale, attraverso un'analisi attenta e mai conclusa delle sue caratteristiche più profonde e meno ovvie. In altre parole (husserliane), è proprio l'intuizione categoriale della nozione di insieme a dettare, in modo non banale, dopo un difficile, lungo addestramento dello sguardo intellettuale da parte del matematico, gli assiomi corretti. Il punto è che questa intuizione matematica non sensoriale può essere considerata, da un punto di vista fenomenologico, come analoga a una sorta di percezione. Questa analogia, che potrebbe apparire inverosimile al di fuori di un contesto fenomenologico, è in realtà fondata su tre forti ragioni: in primo luogo, perché l'intuizione matematica intellettuale opera nel riempimento di un'intenzione significante (per dirla in gergo fenomenologico: si veda ad esempio la prima sezione della sesta ricerca) in un modo che ricorda da vicino il ruolo della percezione sensoriale nell'esperienza in generale; in secondo luogo, perché produce l'esperienza diretta dell'oggetto, in un senso che tuttavia non si oppone al pensiero discorsivo (questo è notoriamente un punto di grave disaccordo tra Husserl e Kant); in terzo luogo, perché non c'è alcuna arbitrarietà nella correttezza del giudizio, che deve sempre rispondere a qualcosa di oggettivo, come nel caso della percezione sensoriale. A questo proposito, possiamo citare l'esempio più elaborato (tra l'altro, di grande interesse per la logica, anche se non è questa la sede per seguirne le ramificazioni) che abbiamo nelle stesse parole di Gödel (come riportate da Wang):

> Per quanto riguarda i paradossi intensionali irrisolti riguardanti il concetto di concetto, il confronto con le illusioni dei sensi è un argomento adeguato contro l'argomento debole per la conclusione forte che, poiché ci sono questi paradossi, i concetti non possono esistere – e quindi sarebbe impossibile arrivare a una teoria vera e propria dei concetti, perché le cose esistenti non possono avere proprietà contraddittorie. I paradossi possono solo mostrare l'inadeguatezza della nostra percezione – cioè comprensione – dei concetti (come il concetto di concetto), piuttosto che gettare dubbi sull'argomento. Al contrario, rivelano qualcosa di non arbitrario e possono quindi anche suggerire che si tratti effettivamente di qualcosa di reale. Soggettivo significa che possiamo formare concetti arbitrariamente, secondo principi corretti di formazione del pensiero. Poiché i principi che portano ai paradossi sembrano essere del tutto corretti in questo senso, i paradossi dimostrano che il soggettivismo è errato (Wang 1996, 7.4.5; corsivo nostro).

Infine, come Hauser afferma molto chiaramente:

> A coloro che rifiutano questa analogia [intuizione/percezione] perché, ai loro occhi, equivarrebbe ad ammettere una sorta di percezione "super-sensoriale", possiamo rispondere con Husserl: l'intuizione categoriale è di fatto super-sensoriale (übersinnlich) in quanto essa è fondata o costruita sopra la sensibilità, ma certamente non nel senso di una sorta di visione che fa astrazione da ogni sensibilità. Quest'ultima, a dire il vero, sarebbe del tutto impossibile per Husserl, data la sua insistenza sul fatto che ogni atto categoriale è in definitiva (anche se molto indirettamente) fondato sulla sensibilità [nel senso tecnico fenomenologico della Fundierung, su cui si veda es. la quarta sezione della quinta ricerca] (Hauser 2006, 567; cfr. Husserl 1901, par. 45, 60).

Non possiamo portare alcuna prova testuale che Gödel abbia fatto propria esplicitamente e letteralmente questa concezione dell'intuizione; tuttavia, abbiamo ricordato sopra che egli raccomandò a diversi logici la trattazione dell'intuizione categoriale da parte di Husserl nella sesta ricerca logica: ora, è proprio quello il luogo in cui tale concezione viene sostenuta in modo approfondito. Anche alla luce delle numerose osservazioni sul ruolo dell'intuizione che si possono trovare nei suoi scritti pubblicati e inediti, qualsiasi lettore di Gödel può rendersi conto del perché egli si sentisse così in sintonia con la spiegazione fenomenologica di quel ruolo.

Conviene infine ricordare che Gödel sottolinea, in una nota stenografica contenuta nella sua copia di *Ideen* (riportata da Hauser 2006, 577, n. 200), il fatto che verso la fine di quell'opera viene attribuito da Husserl un ruolo cruciale all'intera sesta ricerca logica come una sorta di preparazione alla fenomenologia della ragione. Poiché quest'ultima è la descrizione dettagliata dei modi in cui, nelle diverse regioni dell'oggettività, determinate sequenze di atti (esperienze possibili) conducono all'evidenza o (in senso opposto) ad una revisione o addirittura al rifiuto delle nostre aspettative, questo mostra chiaramente ancora una volta che Gödel era particolarmente incline ad accettare quegli aspetti di fallibilità nella teoria fenomenologica dell'evidenza che sono della massima importanza per una descrizione della conoscenza matematica. C'è un aspetto essenzialmente graduale e anche in qualche misura "olistico" (nel senso dell'importanza della "coerenza concettuale" dell'intera teoria rispetto all'evidenza del singolo assioma) nel processo di sviluppo concettuale della teoria assiomatica degli insiemi: l'intuizione della nozione oggettiva di insieme, come abbiamo visto, è diretta, ma la sua articolazione negli assiomi è un processo lungo e intricato, in cui l'evidenza si dispiega gradualmente e in modo sempre imperfetto, e gli assiomi (tranne nei casi più semplici) non sono affatto immediatamente evidenti.

Gödel dunque era attratto soprattutto dalla fase "trascendentale" e dal carattere "idealista" (in senso specifico) della filosofia di Husserl. Sul tema cruciale dell'intuizione degli oggetti ideali, con le sue importanti conseguenze per i fondamenti della matematica (in particolare in relazione al concetto di insieme) e in considerazione del ruolo di tale forma di intuizione nella conoscenza matematica in generale, Gödel si aspettava dalle opere di Husserl nientemeno che una piena e finalmente realizzabile chiarificazione filosofica, sufficiente a render conto di quel tipo di esperienza diretta (analoga a una sorta di percezione) degli oggetti della matematica su cui a suo avviso si fonda l'oggettività, forte come nessun'altra, dei giudizi matematici.

3. Una prospettiva wittgensteiniana

Non intendiamo qui contribuire in modo originale all'esegesi del quadro estremamente complesso e articolato della filosofia della matematica di Wittgenstein (per cui rimandiamo a Frascolla 1994 per una puntuale ricostruzione complessiva e all'utile sintesi di Rodych 2018, anche per la bibliografia recente), e neppure entrare nel merito dell'enorme letteratura pertinente. Per indicare invece solo una delle possibili direzioni che riflessioni in senso lato *wittgensteiniane* possono aprire in quest'ambito, ci limitiamo a prendere un singolo esempio: alcune considerazioni del Wittgenstein maturo sul *seguire una regola* nella loro esemplificazione in riferimento alle più semplici operazioni aritmetiche, considerazioni che come è noto si trovano nelle *Philosophische Untersuchungen* (Wittgenstein 1953, Sezioni 185-242) e nelle *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Wittgenstein 1956, Parti I e VI). Le discuteremo brevemente riferendoci alla classica presentazione di esse da parte di Saul Kripke (1982), quindi introducendo in realtà il personaggio filosofico fittizio che nella ormai vasta letteratura sul tema (rimandiamo a Hossein Khani 2023 e Reiland 2023 per bibliografie aggiornate, e a Verheggen 2024 per una recente raccolta di saggi) viene talvolta chiamato "Kripkenstein". Scegliamo questa via, magari discutibile (ricordando comunque alla fine alcune critiche sollevate contro l'interpretazione kripkiana), perché crediamo che attraverso di essa possano emergere in modo particolarmente perspicuo i problemi che qui ci interessano, riguardanti la questione della possibilità stessa, in riferimento alle più semplici operazioni matematiche, di una nozione coerente di conformità di un'azione a una regola, o di applicazione corretta di una regola, o di esecuzione corretta di un'attività sottoposta a regole, con le conseguenze filosofiche che vedremo.

La formulazione più semplice e generale del cosiddetto "paradosso" del Wittgenstein kripkiano sul seguire una regola è forse la seguente: «Il nostro paradosso era questo: una regola non può determinare alcun modo d'agire, poiché qualsiasi modo d'agire può essere messo d'accordo con la regola» (Wittgenstein 1953, Sezione 201). Per formularlo esplicitamente e spiegarlo in alcuni suoi aspetti rilevanti per la filosofia della matematica, i soli che qui ci interessano, conviene concentrarsi innanzitutto (seguendo Kripke) su un semplice esempio aritmetico. Consideriamo la parola "più" e il simbolo corrispondente, "+": li usiamo per designare la funzione di *addizione*, una funzione ben definita. Quando diciamo che *afferriamo la regola* dell'addizione, e che imparare l'addizione significa afferrare tale regola, riconosciamo implicitamente che ci sono certe nostre intenzioni passate, riferite a quella operazione, che sono sufficienti a determinare una risposta ben determinata in un numero di casi futuri che è indeterminato. Ora, prendiamo un esempio di una addizione che nel passato non ho mai eseguito. Kripke (1982, 16) sceglie "68+57", ma è chiaro che un esempio del genere lo si può sempre trovare (avrò eseguito infatti sempre solo un numero finito di calcoli). Eseguo il calcolo e ottengo la risposta giusta, "125". Ora si fa avanti lo scettico, che dubita della mia sicurezza nel rispondere, suggerendo che, per il modo in cui usavo "più" nel passato, la risposta che intendevo come corretta per "68+57" era "5", e non "125". Lo scettico sembra semplicemente un pazzo; ma mi fa subito notare che il numero 125 non compare (per ipotesi) in nessuna esplicita istruzione che mi sono dato; io rispondo naturalmente che semplicemente applico la *stessa* regola che ho applicato in passato; al che lo scettico mi chiede: *quale* regola? Forse nel passato ho usato "+" per designare una funzione, chiamiamola "viù" (simbolicamente "#"), definita così: $x\#y = x+y$, se $x,y < 57$; $x\#y = 5$, altrimenti. Come possiamo essere sicuri che io non intendessi questa funzione con "più"? Lo scettico suggerisce che con "più" io in realtà ho sempre inteso viù, e ora sto semplicemente fraintendendo il mio uso passato (basta invertire più e viù, per vedere che questa ipotesi non è logicamente impossibile). È chiaro che l'ipotesi dello scettico è falsa, per non dire assurda. Ma come confutarla? Quale *fatto* sul mio uso passato potremmo utilizzare a questo scopo? È chiaro che nel calcolare 68+57=125 io non do una risposta a caso, ma seguo certe istruzioni ben precise, date precedentemente, ed esse stabiliscono senza ambiguità che il risultato è quello.

Ma di che istruzioni si tratta? Non posso riferirmi esplicitamente al risultato specifico, né dire “faccio la stessa cosa”, riferendomi al numero *finito* di esempi nel passato. Dunque, lo scettico dubita che ci sia un *fatto* che io intendessi proprio più e non altro, fatto che sarebbe sufficiente a rispondere alla sua obiezione; inoltre, dubita che io abbia qualsiasi ragione per rispondere adesso con sicurezza proprio come rispondo (“125” e non “5”). Bisogna rispondere a entrambi questi dubbi. Si noti che lo scettico non dubita del mio uso *presente* di “più”, e mi concede che, dato questo uso, il risultato è 125. Lo scettico parla il mio linguaggio (altrimenti manca ogni terreno comune di discussione). Quello di cui dubita è che io stia rispettando le mie intenzioni *precedenti*. Non si tratta, almeno per ora, di uno scetticismo sull’aritmetica, e questo va tenuto presente. Non: come so che 68+57=125? Ma invece: come so che “68+57”, nel senso in cui nel passato intendevo “+”, dovrebbe designare 125? È chiaro che, se ha ragione lo scettico, la nozione stessa di intendere una funzione (e non un’altra) non ha alcun senso (parlare di intenzioni nel passato è solo un artificio provvisorio: in modo tipicamente wittgensteiniano, gettiamo via la scala dopo essere saliti su di essa), e questo ha conseguenze disastrose sulla nozione generale di “intendere” in matematica. Si noti che non poniamo nessun limite sui fatti che possono essere presi in considerazione contro lo scettico: ad esempio, non c’è alcuna restrizione comportamentista. Il fatto è che neppure un essere onnisciente sarebbe in una posizione migliore della nostra.

La risposta che salta subito in mente è questa: io in realtà ho imparato una *regola* per l’addizione, una regola che posso esprimere in termini primitivi di conteggio, o del comune algoritmo di addizione che usiamo tutti i giorni, o delle due clausole della definizione ricorsiva ($x+0=x$; $x+y'=(x+y)'$). Ma lo scettico ha buon gioco nel mettere in dubbio la mia attuale interpretazione dei miei usi passati di tutti quei termini che ora vorrei prendere come saldi punti di riferimento (può farlo perfino con le equazioni ricorsive). Si tratta del problema, tipicamente wittgensteiniano, su “una regola per interpretare una regola”, e sul relativo regresso all’infinito. Ma allora applico la regola *ciecamente*? Non sono forse *guidato* da essa? Forse che seguo semplicemente un *impulso* non giustificabile? Il problema non riguarda solo il linguaggio aritmetico o in generale i linguaggi matematici, ma *tutto* il linguaggio, e in particolare (almeno secondo Kripke 1982, 25) per Wittgenstein i linguaggi matematici e il linguaggio delle sensazioni si trovano sottoposti al *comune* problema scettico che abbiamo delineato (si veda il cosiddetto argomento wittgensteiniano del "linguaggio privato", cui qui non possiamo neppure accennare). Ricordiamo che l'argomento dello scettico non ha niente a che fare con questioni epistemologiche: il ricorso a un essere onnisciente non cambia nulla, dato che per lo scettico semplicemente *non c'è alcun fatto* che possa costituire il mio avere inteso con "+" più e non altro (o anche nulla). Se nella presentazione iniziale abbiamo dovuto usare il verbo "intendere" al passato, ci rendiamo conto ben presto che, in realtà, quel fatto che cerchiamo non c'è, né per il passato, né per il presente, né per alcun tempo. Lasciamo la parola a Kripke:

> A volte, considerando questa situazione, ho provato quasi una sensazione di sbigottimento. Anche adesso mentre scrivo, mi sento sicuro che esiste qualcosa nella mia mente – il significato che annetto al segno "più" – che mi guida a fare quel che dovrò fare in tutti i casi futuri. Non sto *prevedendo* quel che *farò* – si veda la discussione che segue immediatamente – ma do istruzioni a me stesso su ciò che devo fare per conformarmi a quel significato. (Se ora io stessi facendo una previsione circa il mio comportamento futuro, ciò avrebbe un contenuto solo perché ha già senso, alla luce delle istruzioni che ho dato a me stesso, chiedersi se ci sarà conformità o no con le mie intenzioni). Ma se concentro la mia attenzione su quel che esiste ora nella mia mente, quali istruzioni vi ritrovo? Come è possibile dire che, quando agirò nel futuro, starò agendo sulla base di tali istruzioni? Gli infiniti casi della tabella dell'addizione non esistono nella mia mente in modo che il mio io futuro possa consultarli. Sostenere che nella mia mente esiste una regola generale che mi dice come sommare nel futuro è semplicemente rovesciare il problema su altre regole, che anch'esse sembrano essere state date unicamente sulla base di un numero finito di casi. Che cosa può esistere nella mia mente che io possa usare quando agirò nel futuro? Sembra che l'idea stessa di intendere svanisca nel nulla (ibid., 27).

Una risposta che è stata data frequentemente alla sfida scettica è che si dovrebbe analizzare il fatto che io intendessi più (e non altro) in termini *disposizionali*. In base a questa analisi, intendere con "più" l'addizione significa essere disposti, quando si richieda una somma, a dare come risposta proprio quella somma. Il problema immediato (senza entrare in dettagli) è che in questo modo si riduce la correttezza alla semplice esecuzione, eliminando la nozione stessa di correttezza e non rispondendo allo scettico, che chiedeva di trovare un fatto passato che potesse *giustificare* la mia risposta attuale. O si ignora che le disposizioni coprono comunque soltanto un numero finito di casi, o si idealizza, ma affinché l'idealizzazione sia quella corretta, ci si rifà circolarmente a quello che si doveva definire. Per il disposizionalista, quale funzione una persona intenda deve essere desunto dalle sue disposizioni. Ma è un fatto che si fanno comunemente errori (ci si chieda: che cos'è una disposizione a fare un errore?). E se si parla di macchine (di Turing o meno), si deve ricordare che sono possibili malfunzionamenti (e parlare di macchine ideali non risolve il problema). Il punto è che tutto l'aspetto *normativo* (e non descrittivo) della questione, che è cruciale in filosofia della matematica come altrove, scompare completamente nel quadro disposizionale. Un'altra risposta (non molto plausibile) è che l'ipotesi corretta (che io intendessi più) deve essere preferita perché è quella più *semplice*. Ma questo non è pertinente: abbiamo visto sopra che non si tratta di un problema scettico di tipo epistemico, e che un essere onnisciente non sarebbe in una posizione migliore di noi. Una terza risposta propone di considerare l'esperienza interna di intendere l'addizione (e non altro) come dotata di una sua *qualità* assolutamente irriducibile (come ad esempio il mal di denti), per cui intendevo l'addizione in quanto avevo un'esperienza proprio con quella qualità. Di nuovo, questo non sembra pertinente: lo scettico risponde che quella sensazione indica invece che devo dare la risposta che consideriamo sbagliata. Ci si ritrova immediatamente con la questione del regresso all'infinito nella interpretazione delle regole (vedi sopra): una regola per interpretare una regola, e così via. Un'impressione, col suo *quale*, non è in grado, da se stessa, di guidarmi nei casi futuri di applicazione. Come *extrema ratio* si potrebbe allora dire che intendere con il "più" l'addizione è uno stato assolutamente primitivo, *sui generis*, non assimilabile a nessun altro, e in particolare non assimilabile a sensazioni, stati qualitativi o disposizioni. Ma questa sembra una mossa disperata: in un certo senso è irrefutabile, ma risulta priva di contenuto. Dovremmo comunque postulare uno stato che abbia carattere di finitezza, in modo da poter "essere" in qualche modo nelle nostre menti (che assumiamo finite). Neppure una posizione di platonismo matematico estremo è in grado di offrire una soluzione, in quanto lo scettico non mette in questione la determinatezza del rapporto (freghianamente inteso) tra senso e riferimento, quanto la determinatezza del rapporto tra entità mentale e senso (come può la presenza nella mia mente di una certa entità costituire l'afferrare proprio quel senso?).

Siamo di fronte, secondo Kripke (ibid., 53), a un nuovo *scetticismo*, particolarmente radicale e originale, e a suo parere lo stesso Wittgenstein riterrebbe di poter opporre ad esso solo una "soluzione scettica": in generale, una tale soluzione a un problema di tipo scettico concede allo scettico che non c'è risposta alle sue obiezioni, ma mostra che la giustificazione richiesta da lui non è, in realtà, necessaria. Secondo Kripke, dunque, Wittgenstein (in modo non del tutto dissimile da Hume su causalità e induzione) proporrebbe sostanzialmente un paradosso scettico e ne offrirebbe una soluzione scettica con cui la paradossalità verrebbe superata. Wittgenstein concede allo scettico che non esiste alcun *fatto* che *consista* nel mio intendere rispettivamente più o viù. Come si può procedere, allora? Senza entrare nella questione del passaggio dalla teoria wittgensteiniana del significato che si trova nel *Tractatus* a quella delle *Ricerche filosofiche*, ci limitiamo qui a ricordare (semplificando all'estremo) che nelle *Ricerche* la centralità delle condizioni di *verità* viene sostituita da quella di condizioni di *asseribilità* o di *giustificazione* (in una certa accezione, peculiarmente wittgensteiniana, di questi termini). Dobbiamo quindi, nell'esempio matematico che qui ci interessa, osservare attentamente le *circostanze* in cui si fanno asserzioni numeriche, e il *ruolo* che tali asserzioni svolgono in un contesto più ampio. È proprio questa richiesta a costituire uno degli aspetti fondamentali della prospettiva wittgensteiniana che stiamo esaminando.

Abbiamo detto che Wittgenstein concede allo scettico che non esistono fatti o condizioni di verità che rendano vero un enunciato come "Giovanni con il 'più' intende l'addizione". La chiave sta nel vedere come *si usano* questi enunciati. Vediamo allora la "soluzione" scettica che Wittgenstein propone. È molto importante ricordare, per comprendere quel che segue, che *non* stiamo cercando condizioni necessarie e sufficienti per seguire una regola in aritmetica (si tratterebbe di una soluzione non scettica ma diretta, e una tale soluzione secondo Wittgenstein è impossibile). Ora, se consideriamo una persona presa isolatamente, sembra che la nozione stessa di una regola che possa guidare il comportamento di chi la segue non possa avere nessun contenuto (questo lo abbiamo visto sopra). Ma le cose cambiano completamente se consideriamo chi segue la regola in quanto inserito in (e interagente con) una *comunità* di individui. Questi avranno a disposizione condizioni di giustificazione per valutare la correttezza o meno dell'esecuzione della regola aritmetica da parte del soggetto. L'esempio proposto da Kripke (ibid., 74) per spiegare questo punto è quello di un bambino che impara l'addizione. Alla base di tutto ci sono *propensioni* (a dare certe risposte e non altre), che devono essere prese come primitive. Alla base di tutto c'è anche il fatto (intrascendibile) che la nostra reale comunità si comporta in modo sostanzialmente *uniforme* nella sua prassi concernente l'addizione. Si può riformulare il punto cruciale della "soluzione" scettica wittgensteiniana (o forse sarebbe meglio dire "kripkensteiniana") mediante un condizionale contrapposto (date, naturalmente, opportune condizioni collaterali): se Giovanni *non* risponde "125" quando gli si chiede di sommare 68 e 57, allora *non* possiamo dire che con "più" Giovanni intende l'addizione. Wittgenstein quindi risponde al problema scettico da lui posto semplicemente descrivendo il "gioco" di attribuire concetti in matematica, dando così sia le condizioni in cui l'attribuzione di concetti è giustificata, sia una spiegazione della funzione del gioco nel contesto più ampio della nostra prassi. Fondamentali, in questa risposta, sono tre componenti. Il primo è l'*accordo*, per cui ci deve essere una concordanza di massima nelle azioni dei membri della comunità. Il secondo componente è la *forma di vita* (*Lebensform*, espressione spengleriana e, ben prima, goethiana): in prima approssimazione, si tratta di un insieme di attività dei membri di una data comunità, attività considerate nella loro connessione reciproca e come costituenti, per così dire, lo "sfondo" delle risposte che emergono dalla concordanza dei membri della comunità stessa; si noti che la forma di vita è un *dato*, intrascendibile e irriducibile ad altro, e che in particolare non si può spiegare la condivisione di una forma di vita con l'afferramento, da parte di tutti, degli stessi concetti. Il terzo ed ultimo componente è dato dai *criteri* di attribuzione (questo componente conduce immediatamente alla questione dei termini di sensazione come "dolore", e quindi all'argomento del "linguaggio privato", che qui non possiamo affrontare). Passando dal caso dell'esecuzione delle più semplici operazioni aritmetiche al caso della matematica non elementare, è fondamentale osservare che accettiamo molti enunciati sulla base di *dimostrazioni*, e una condizione necessaria perché possiamo attribuire a un altro la padronanza di certi concetti è che concordiamo tra noi su che cosa si debba considerare una dimostrazione, in quanto oggetto "visibile" e, come dice Wittgenstein, "ispezionabile".

Ci si può chiedere allora se, dando ragione a Wittgenstein, siamo costretti a ritenere che Robinson Crusoe sull'isola deserta non possa, per definizione, seguire alcuna regola, aritmetica o di altra natura. La risposta è negativa: di un individuo da solo si può benissimo dire che segue una regola, ma non lo si può dire se l'individuo è considerato isolatamente; si noti però che non segue affatto dalle considerazioni wittgensteiniane che la risposta corretta a un problema di addizione sia per definizione quella che viene data comunemente da tutti; ne segue piuttosto che nessuno potrà essere giustificato a dire che è sbagliata una risposta su cui tutti concordano.

Naturalmente, la ricostruzione kripkiana, che qui abbiamo seguito per chiarezza e semplicità, non è da prendere come indiscutibilmente fedele alle intenzioni wittgensteiniane. Ad esempio, McGinn (1984, 67) sottolinea che Wittgenstein stesso sembra negare (sempre nella stessa sezione 201 delle *Ricerche*) l'esistenza di un paradosso scettico, che sorgerebbe solo nel caso in cui, erroneamente, si identificasse l'afferrare una regola aritmetica con un atto di *interpretazione*: il presunto paradosso sarebbe solo una sorta di *reductio* di tale identificazione errata (un punto evidenziato indipendentemente da altri, tra cui ricordiamo Gargani). Secondo McGinn, mentre Kripke ritiene, come abbiamo visto, che la distinzione cruciale per la questione delle regole sia quella tra "individuale" e "sociale", in Wittgenstein quello che conta è espellere il significato da "dentro" (la mente, intesa secondo una visione sulla falsariga del cosiddetto "privato cartesiano") a "fuori" (comportamenti aperti, pratiche pubbliche condivise, in ultima analisi la concordanza nella *Lebensform*). Se poi Kripke intende che si possa "dimostrare" in qualche modo, mediante il riferimento alle pratiche comunitarie, la conformità di un'azione a una regola, allora la sua interpretazione va addirittura contro l'implicita negazione wittgensteiniana di tale possibilità. Baker e Hacker (1984, 20) insistono invece sul fatto che, diversamente da come Kripke vorrebbe, la questione non è l'insensatezza di pensare che si possa seguire una regola "da soli", ma che lo si possa fare "una volta sola": le pratiche sociali coinvolte devono dar luogo ad azioni, in questo senso, appunto, regolari. Queste interpretazioni paiono avere un esito di carattere naturalistico, appellandosi ad un presunto nostro senso "naturale" di ciò che è corretto e di ciò che non lo è, arrivando forse a basare (se non a dissolvere) il normativo nel naturale, anche in matematica. È un esito, questo, che molti lettori di Wittgenstein, classici e recenti, rifiuterebbero decisamente. Infine, ricordiamo alcune elaborate obiezioni rivolte a Kripke da parte di Goldfarb (1985). Ci sarebbe sia un problema di accuratezza ermeneutica, sia un problema (largamente indipendente) di correttezza in sé dell'argomento kripkiano. Secondo Goldfarb, quello che preoccupa in primo luogo Kripke sono possibili tentativi, di sapore fisicalista, di riduzione della nozione di significato; ma queste preoccupazioni sono un po' diverse da quelle che emergono dal testo delle sezioni delle *Ricerche* considerate, e i requisiti che Kripke impone su quei possibili tentativi sono in realtà troppo stringenti, e in ultima analisi incompatibili tra loro; si vorrebbero salvaguardare trasparenza e normatività del significato, da una parte, ma dall'altra si afferma l'incapacità delle nostre pratiche di giustificare le nostre comuni attribuzioni di correttezza a certe risposte, in quanto non escludono bizzarre possibilità di devianza. In secondo luogo, come abbiamo visto, Kripke non può accettare *simpliciter* che siamo autorizzati ad asserire che qualcuno intende correttamente l'addizione con "+" quando quella persona ha risposto con la somma in ogni caso dato fin qui, poiché così mancherebbe ogni riferimento alla comunità; Kripke ha bisogno di condizioni di asseribilità più stringenti, che (in conformità alla sua argomentazione) non possono essere tali che la loro applicazione richieda proprio una conoscenza sostanziale di quella che è la continuazione corretta in base alla regola considerata; ma allora che cosa rimane del "rispondere nello stesso modo"? La nozione di accordo diventa così fragile che non si vede come possa fare sufficientemente differenza (il che è cruciale) tra l'essere solo propensi e l'essere invece giustificati, così da distinguere tra linguaggio solitario e linguaggio pubblico. Infine, sembra che quel che più importa a Wittgenstein non sia quello che preoccupa Kripke: parlare di "interpretazioni" di una regola ha senso solo sulla base di una concezione di accordo con una regola; prendere interpretazioni patologiche per segnalare un problema di funzionamento delle regole è qualcosa che si può fare solo ignorando il contesto dato dalle nostre pratiche (aritmetiche o di altra natura), che è invece costitutivo del nostro possesso della concezione stessa di accordo (e questo Kripke lo accetta in pieno). Sulle problematiche sottese a tutte queste obiezioni, che qui non possiamo approfondire, conviene rimandare alla dettagliata analisi di Frascolla (1996), che evidenzia sostanzialmente che la *community view* del seguire una regola, non solo in matematica, non è da considerarsi parte di una teoria delle condizioni di asseribilità di giudizi empirici (sulla conformità a una regola di uno specifico atto di un certo soggetto in una certa occasione), quanto piuttosto una componente fondamentale della concezione wittgensteiniana matura dei nessi concettuali ("relazioni interne", atemporali, una sua versione delle "verità necessarie"), in matematica e non soltanto in matematica.

Bibliografia

Baker, G.P., Hacker, P.M.S. (1984). *Scepticism, rules and language*. OUP, Oxford 1984.

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *Philosophical Review*, 74 (1965), 47-73.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *Journal of Philosophy*, 70 (1973), 661-679.

Benacerraf, P. (1985). Skolem and the Skeptic. *Proceedings of the Aristotelian Society, Suppl. Vol.* 59 (1985), 85-115.

Benacerraf, P., Putnam, H., eds. (1983). *Philosophy of mathematics*. 2nd ed. CUP, Cambridge 1983.

Bernays, P. (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'enseignement mathématique*, 34 (1935), 52-69.

Biagioli, F. (2016). *Space, number and geometry from Helmholtz to Cassirer*. Springer, Cham 2016.

Biagioli, F. (2020). Ernst Cassirer's transcendental account of mathematical reasoning. *Studies in history and philosophy of science*, 79 (2020), 30-40.

Boccuni, F., Sereni, A., eds. (2022). *Origins and varieties of logicism*. Routledge, Abingdon 2022.

Boolos, G. (1971). The iterative concept of set. *Journal of Philosophy*, 68, 215-232.

Boolos, G. (1985). Nominalist Platonism. *Philosophical Review*, 94, 327-44.

Cassirer, E. (1907). Kant und die moderne Mathematik. *Kantstudien*, 12 (1907), 1-49.

Cassirer, E. (1910). *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Bruno Cassirer, Berlin 1910; trad. it., La Nuova Italia, Firenze 1973.

Cassirer, E. (1929). *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil*: *Phänomenologie der Erkenntnis*. Bruno Cassirer, Berlin 1929; trad. it., La Nuova Italia, Firenze 1966.

Cassirer, E. (1940). Der Zahlbegriff und seine logische Begründung, in *Das*

Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit, Vol. IV (1940); trad. it., Einaudi, Torino 1961, 92-131.

Chihara, C. (2004). *A structural account of mathematics*. OUP, Oxford 2004.

Couturat, L. (1904). La philosophie des mathématiques de Kant. *Revue de méthaphysique et de morale*, 12 (1904), 321-383.

Couturat, L. (1905). *Les principes des mathématiques. Avec une appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*. Paris 1905.

Dales, H. G., Oliveri, G. (1998). Truth and the foundations of mathematics, in Dales-Oliveri (eds.), *Truth in mathematics*. OUP, Oxford 1998, 1-37.

Drake, F. (1974). *Set Theory: An Introduction to Large Cardinals*. North Holland, Amsterdam 1974.

Feferman, S. (2004). Notes on operational set theory. Stanford, unpublished.

Ferrari, M. (1988). *Il giovane Cassirer e la Scuola di Marburgo*. Angeli, Milano 1988.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Routledge, London 1994.

Frascolla, P. (1996). Wittgenstein sul seguire una regola, in *Atti del primo convegno nazionale SIFA*, Genova 1996.

Gödel, K. (1938). The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis. *Proc. N.A.S. USA*, 24 (1938), 556-57.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's continuum problem? *American Mathematical Monthly*, 54 (1947), 515-525; revised version (1964) repr. in Benacerraf-Putnam (1983), 470-485; *Collected works* II, Oxford 1990, 176-188, 254-270.

Gödel, K. (1961). The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy (unpublished lecture, 1961), in *Collected works* III, OUP, New York 1995, 374-386.

Gödel, K. (undated). Notes on the Logische Untersuchungen, Gödel's Nachlass, N. 060456, transcribed by C.A. Dawson.

Gödel, K. (2019). *Philosophical notebooks* (Engelen, E., ed.), Vols. I-V. De Gruyter, Berlin 2019ff.

Hahn, H. (1933). Die Krise der Anschauung, in *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften*. Deuticke, Leipzig und Wien 1933.

Hallett, M. (1984). *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. OUP, Oxford 1984.

Hallett, M. (1994). Putnam and the Skolem Paradox, in Clark, P., Hale, B., eds., *Reading Putnam*. OUP, Oxford 1994, 66-97.

Hart, W. D., ed. (1996). *The Philosophy of Mathematics*. OUP, Oxford 1996.

Hauser, K. (2006). Gödel's program revisited. Part I: The turn to Phenomenology. *Bulletin of Symbolic Logic* 12 (2006), 529-590.

Heis, J. (2010). Critical philosophy begins at the very point where logistic leaves off: Cassirer's response to Frege and Russell. *Perspectives on Science*, 18 (2010), 383-408.

Heis, J. (2014). Ernst Cassirer's Substanzbegriff und Funktionsbegriff. *HOPOS*, 4 (2014), 241-270.

Hilbert, D. (1935). *Gesammelte Abhandlungen. Band* III. Springer, Berlin 1935.

Hilbert, D. (1978). *Ricerche sui fondamenti della matematica*, trad. e cura di V. M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978.

Hölder, O. (1924). *Die mathematische Methode*. Springer, Berlin 1924.

Horsten, L. (2022). *Philosophy of mathematics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy (2022), https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/

Hossein Khani, A. (2023). *Kripke's Wittgenstein* (2023), Internet Encyclopedia of Philosophy, https://iep.utm.edu/kripkes-wittgenstein/

Husserl, E. (1901). *Logische Untersuchungen, Zweiter Band. II Teil. Elemente einer phaenomenologischen Aufklärung der Erkenntnis* (1901). IV ed., Niemeyer, Tübingen 1968.

Jensen, R. (1995). Inner Models and Large Cardinals. *Bulletin of Symbolic Logic*, 1 (1995), 393-407.

Kanamori, A. (1994). *The Higher Infinite*. Springer, Berlin 1994.

Kant, I. (1787). *Kritik der reinen Vernunft*, Akademie Ausgabe, Bd. 3, Berlin 1970; trad. it., UTET, Torino 1986.

Klenk, V. (1976). Intended Models and the Löwenheim-Skolem theorem. *Journal of Philosophical Logic*, 5 (1976), 475-89.

Kreisel, G. (1965). Mathematical Logic, in Saaty, L. (ed.), *Lectures in Modern Mathematics*, Wiley, New York 1965, 95-195.

Kreisel, G. (1967). Informal Rigour and Completeness Proofs, in Lakatos, I. (ed.), *Problems in the philosophy of mathematics*, North Holland, Amsterdam 1967, 138-186.

Kreisel, G. (1967a). Mathematical logic: what has it done for the philosophy of mathematics?, in Schoenman, R. (ed.), *Bertrand Russell, Philosopher of the Century*. Allen and Unwin, London 1967, 201-272.

Kripke, S. (1982). *Wittgenstein on rules and private language*. OUP, Oxford 1982; trad. it., Boringhieri, Torino 1984.

Lawvere, F. W., Rosebrugh, R. (2003). *Sets for mathematics*. CUP, Cambridge 2003.

Lear, J. (1977). Sets and Semantics. *Journal of Philosophy*, 74, 86-102.

Linnebo, Ø. (2017). *Philosophy of Mathematics*, PUP, Princeton 2017.

Lolli, G. (1985). La matematica: i linguaggi e gli oggetti, in *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat* (a cura di C. Mangione), Garzanti, Milano 1985, 213-40.

Lolli, G. (2002). *Filosofia della matematica*. Il Mulino, Bologna 2002.

Maddy, P. (1980). Perception and Mathematical Intuition. *Philosophical Review*, 89 (1980), 163-196.

Maddy, P. (1988). Believing the Axioms. *Journal of Symbolic Logic*, 53 (1988), 481-511, 736-764.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. OUP, Oxford 1990.

Maddy, P. (1994). Taking Naturalism Seriously, in *Logic, Methodology and Philosophy of Science* IX (Prawitz, D. et al., eds.), North Holland, Amsterdam 1994.

Maddy, P. (1996). Set-theoretic Naturalism. *Journal of Symbolic Logic*, 61 (1996), 490-514.

Maddy, P. (1997). *Naturalism in mathematics*. OUP, Oxford 1997.

Maddy, P. (2011). *Defending the axioms*. OUP, Oxford 2011.

Mancosu, P., ed. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*, OUP, Oxford 2008.

Manin, Y.I. (1998). Truth, rigour and common sense, in Dales-Oliveri (eds.), *Truth in mathematics*. OUP, Oxford 1998, 147-159.

McGee, V. (2000). Everything, in Sher, G., Tieszen, R. (eds.), *Between logic and intuition*. CUP, Cambridge 2000, 54-78.

McGinn, C. (1984). *Wittgenstein on meaning*. OUP, Oxford 1984.

Mormann, T. (2008). Idealization in Cassirer's philosophy of mathematics. *Philosophia Mathematica*, 16 (2008), 151-181.

Morton, S., Stich, S., eds. (1996). *Benacerraf and His Critics*. OUP, Oxford, 1996.

Myhill, J. (1951). On the Ontological Significance of the Löwenheim-Skolem Theorem, in Copi, I., Gould, J.D., eds., *Contemporary Readings in Logical Theory*. Macmillan, London 1967, 40-54.

Parsons, C. (1974). Informal axiomatization, formalization, and the concept of truth. *Synthese*, 27 (1974), 27-47.

Parsons, C. (1974a). Sets and classes. *Noûs*, 8, 1-12.

Parsons, C. (1977). What is the iterative concept of set?, in Butts-Hintikka (eds.), *Logic, foundations of mathematics and computability theory*. Reidel, Dordrecht, 1977, 335-367.

Parsons, C. (1983). *Mathematics in Philosophy*. Cornell UP, Ithaca 1983.

Paseau, A. (2001). Should the logic of set theory be intuitionistic? *Proceedings of the Aristotelian society*, 101 (2001), 369-378.

Paseau, A. (2003). The open-endedness of the set concept and the semantics of set theory. *Synthese*, 135, 379-399.

Pataut, F., ed. (2017). *Truth, Objects, Infinity. New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf*. Kluwer, Dordrecht 2017.

Piazza, M. (2000). *Intorno ai numeri*. Bruno Mondadori, Milano 2000.

Poincaré, H. (1902). Sur la nature du raisonnement mathématique, in *La science et l'hypothèse*. Flammarion, Paris 1902, 17-51.

Quine, W. V. O. (1981). *Theories and Things*. Harvard UP, Cambridge (Mass.), 1981.

Reiland, I., ed. (2023). *Kripkenstein on meaning*, PhilPapers bibliography (2023), https://philpapers.org/browse/kripkenstein-on-meaning

Rodych, V. (2018). *Wittgenstein's philosophy of mathematics*, Stanford Encyclopedia of Philosophy (2018), https://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein-mathematics/

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. CUP, Cambridge 1903; trad. it., Longanesi, Milano 1963.

Scott, D. (1974). Axiomatising set theory, in Jech, T. (ed.), *Axiomatic Set Theory* II. AMS, Providence 1974, 207-214.

Shapiro, S. (1990). Second-Order Logic, Foundations, and Rules. *Journal of Philosophy*, 87 (1990), 234-261.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics*. OUP, Oxford 2000.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1967; trad. it., Boringhieri, Torino 1980.

Shoenfield, J. R. (1977). Axioms of set theory, in Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*. N. Holland, Amsterdam 1977, 321-44.

Solovay, R. (1969). The Cardinality of Sigma-1-2 Sets of Reals, in Bulloff, J. et al. (eds.), *Foundations of Mathematics*. Springer, Berlin 1969, 58-73.

Solovay, R. (1970). A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable. *Annals of Mathematics*, 92 (1970), 1-56.

Tharp, L. (1989). Myth and Mathematics: a Conceptualistic Philosophy of Mathematics I. *Synthese*, 81, 167-201.

Tieszen, R. (2011). *After Gödel. Platonism and rationalism in mathematics and logic*. OUP, New York 2011.

Van Atten, M. and J. Kennedy (2003). On the philosophical development of Kurt Gödel. *Bulletin of Symbolic Logic*, 9 (2003), 425-476.

Verheggen, C., ed. (2024). *Kripke's 'Wittgenstein on rules and private language' at forty*. CUP, Cambridge 2024.

Wang, H. (1974). *From mathematics to philosophy*. Routledge, London 1974; trad. it., Boringhieri, Torino 1984.

Wang, H. (1977). Large sets, in Butts-Hintikka (eds.), *Logic, foundations of mathematics and computability theory*. Reidel, Dordrecht 1977, 309-333.

Wang, H. (1996). *A logical journey. From Gödel to philosophy*. Harvard UP, Cambridge (Mass.) 1996.

Weyl, H. (1918). *Das Kontinuum*. Veit, Leipzig 1918; trad. it., Bibliopolis, Napoli 1977.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Blackwell, Oxford 1953; trad. it., Einaudi, Torino 1967.

Wittgenstein, L. (1956). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Blackwell, Oxford 1956, trad. it., Einaudi, Torino 1971.

Yap, A. (2017). Dedekind and Cassirer on mathematical concept formation. *Philosophia Mathematica*, 25 (2017), 369-389.

Zermelo, E. (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. *Fundamenta Mathematicae*, 16 (1930), 29-47.

Indice dei nomi

Baire, R., 92
Baker, G., 138, 141
Benacerraf, P., 8, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 56, 57, 82, 88, 97, 141, 142, 144, 145, 149
Bernays, P., 58, 141
Biagioli, F., 55, 61, 65, 67, 141
Boccuni, F., 56, 141
Boolos, G., 21, 26, 28, 141
Borel, E., 91, 92

Cantor, G., 58, 75, 76
Casari, E., 66
Cassirer, E., 8, 10, 11, 14, 51, 52, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 141, 142, 146, 149
Chihara, C., 20, 26, 118, 142
Cohen, H., 52, 66
Cohen, P., 87
Couturat, L., 55, 56, 78, 142
Curry, H., 97

Dales, H., 27, 142, 144
Dedekind, R., 56, 75, 146
Descartes, R., 62
Drake, F., 92, 142
Dummett, M., 21

Feferman, S., 26, 142
Ferrari, M., 58, 142
Feynman, R., 94
Field, H., 20
Fraenkel, A., 26, 91, 115
Frascolla, P., 130, 139, 142
Frege, G., 56, 72, 75, 78, 143

Galilei, G., 52
Gargani, A., 137
Gödel, K., 11, 18, 28, 61, 89, 92, 97, 100, 108, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 142, 146

Hacker, P., 138, 141
Hahn, H., 64, 142
Hallett, M., 28, 42, 142, 143
Hamilton, W., 79
Hart, W., 15, 19, 20, 21, 143
Hauser, K., 119, 120, 121, 122, 128, 129, 143
Heis, J., 55, 56, 67, 78, 143
Hilbert, D., 16, 61, 62, 70, 97, 143
Hölder, O., 79, 143
Horsten, L., 15, 143
Hossein, A., 130, 143
Hume, D., 135
Husserl, E., 52, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 143

Jensen, R., 88, 100, 101, 106, 143

Kanamori, A., 91, 92, 143
Kant, I., 10, 11, 14, 21, 52, 55, 57, 60, 63, 77, 78, 79, 83, 84, 119, 126, 128, 141, 142, 143
Kennedy, J., 119, 125, 146
Klein, F., 61
Klenk, V., 41, 42, 143

Kreisel, G., 22, 26, 28, 143, 144
Kripke, S., 30, 34, 130, 131, 133, 135, 136, 137, 138, 139, 144

Lawvere, F., 26, 144
Lear, J., 29, 30, 31, 111, 144
Lebesgue, H., 92, 146
Leibniz, G., 52, 57, 75
Linnebo, Ø., 15, 144
Lolli, G., 15, 34, 49, 50, 51, 52, 144
Löwenheim, L., 33, 40, 143, 145

Maddy, P., 10, 20, 25, 31, 57, 66, 87, 88, 89, 93, 94, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 144
Mancosu, P., 15, 144
Manin, Y., 113, 144
Martin, D., 87
McGee, V., 26, 144
McGinn, C., 137, 144
Mitchell, W., 88
Moriconi, E., 13
Mormann, T., 55, 65, 67, 144
Morton, S., 15, 144
Myhill, J., 37, 38, 39, 145

Natorp, P., 52, 66

Oliveri, G., 27, 142, 144

Parsons, C., 29, 117, 145
Paseau, A., 30, 145
Pataut, F., 15, 145
Perrin, J., 93
Piazza, M., 15, 145
Platek, R., 34
Poincaré, H., 60, 63, 80, 145
Putnam, H., 15, 18, 20, 88, 89, 97, 141, 142, 143

Quine, W., 19, 20, 89, 90, 97, 145

Reiland, I., 130, 145
Resnik, M., 20
Robinson, A., 97
Rodych, V., 130, 145
Rosebrugh, R., 26, 144
Russell, B., 56, 62, 75, 143, 144, 145

Scott, D., 28, 145
Sereni, A., 141
Shapiro, S., 15, 20, 39, 145
Shoenfield, J., 28, 145, 146
Skolem, T., 14, 33, 40, 42, 43, 44, 141, 143, 145
Solovay, R., 92, 146
Steel, J., 87, 88
Stich, S., 15, 144

Tait, W., 20
Tarski, A., 25, 45, 47, 49, 102
Tharp, L., 10, 111, 112, 114, 115, 116, 117, 118, 146
Tieszen, R., 119, 125, 144, 146
Turing, A., 134

Van Atten, M., 119, 125, 146
Verheggen, C., 130, 146
Von Neumann, J., 124

Wang, H., 28, 119, 120, 121, 123, 124, 128, 146
Weyl, H., 12, 59, 63, 70, 79, 80, 146
Wittgenstein, L., 11, 130, 131, 133, 135, 136, 137, 138, 139, 142, 143, 144, 146
Woodin, H., 87
Wright, C., 21

Yap, A., 56, 146

Zermelo, E., 26, 27, 91, 115, 124, 146

Indice

Prefazione 7

Capitolo Primo
Qualche premessa sul problema di Benacerraf 15

Capitolo Secondo
Una prospettiva di realismo insiemistico 25

1. Realismo insiemistico 25
2. Intuizione e interpretazione 33
3. L'informale in matematica 37
4. Linguaggi matematici formali 45

Capitolo Terzo
Una prospettiva neokantiana 55

1. Cassirer filosofo della matematica 55
2. Il *Funktionsbegriff* 66
3. Sui simboli matematici 70
4. Matematica libera 73
5. Un'alternativa neokantiana 82

Capitolo Quarto
Una prospettiva naturalista 87

1. Naturalismo matematico 87
2. Conseguenze metodologiche 98
3. Qualche considerazione critica 105

Capitolo Quinto
Altre prospettive 111

1. Una prospettiva concettualista 111
2. Una prospettiva fenomenologica 119
3. Una prospettiva wittgensteiniana 130

Bibliografia 141

Indice dei nomi 147

Edizioni ETS
Palazzo Roncioni - Lungarno Mediceo, 16, I-56127 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di gennaio 2025